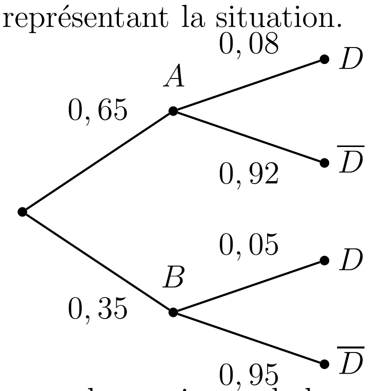
Corrigé du contrôle commun n° 2

Exercice 1

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.



   (b) Calculer la probabilité que l'ampoule provienne de la machine A et ne présente pas de défaut.
   $P(A \cap \overline{D}) = P(A) \times P_A(\overline{D}) = 0,65 \times 0,92 = 0,598$.

   (c) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
   A et B forment ue partition de Ω.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P\left(\overline{D}\right) = P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,9305$.

   (d) L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
   $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{p\left(A \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,598}{0{,}930\,5} \approx 0{,}642\,7$.

2. On prélève des ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
   (a) Pour cette question seulement, on prélève 10 ampoules.
      i. Calculer la probabilité que 2 ampoules présentent un défaut.
      On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques indépendantes, de même paramètre $p = 0,08$. La variable X qui correspond au nombre d'ampoules qui présentent un défaut suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,08$.
      $P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,08^2 \times 0,92^8 \approx 0,1478$.
      ii. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 4 ampoules présentant un défaut.
      $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0,0058$.

   (b) **Question bonus :** Déterminer le nombre minimal d'ampoules à prélever pour que la probabilité d'obtenir au moins une ampoule ayant un défaut soit supérieure ou égale à 0,99.
   Désormais, la variable X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,08$.
   La probabilité qu'il y ait au moins une ampoule qui présente un défaut est :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n = 1 - (1 - 0,08)^n = 1 - 0,92^n$.
   On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,92^n \geqslant 0,99$.
   Cela revient à $0,92^n \leqslant 0,01$.
   La suite $(0,92^n)$ est décroissante, et avec la calculatrice, on observe que :
   $0,92^{55} \approx 0,0102 > 0,01$, et $0,92^{56} \approx 0,0094 < 0,01$.
   Il faut donc prélever au moins 56 ampoules pour que la probabilité d'avoir au moins une ampoule avec un défaut dépasse 0,99.

Exercice 2

1. (a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = 6 \times (4x+3)^5 \times 4 = 24(4x+3)^5$

   (b) $f(x)$ existe si et seulement si $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
   $2x^2-x-1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1^2+8 = 9 = 3^2$.
   Il a donc deux racines $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$. De plus le coefficient de x^2 est positif, donc f est définie sur $]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$.
   f est dérivable sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x-1}}$.

2. Les primitives F_k de f sur $\mathbb{R}$ sont telles que $F_k(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
   On cherche F_k telle que $F_k(1) = 2$, c'est à dire $1 + \dfrac{3}{2} - 1 + k = 2$ c'est à dire $k = \dfrac{1}{2}$.
   Donc la primitive F cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

1. (a) Pour tout x de $]0; +\infty[$: $g(x) = x^3(1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3})$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   (b) g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a $g\,'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$.
   $g\,'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -1 et dont le coefficient de x^2 est positif, donc :
   pour tout x de $]1; +\infty[$, $g\,'(x) > 0$ et, pour tout x de $[0; 1[$, $g\,'(x) < 0$.
   Donc g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; 1]$.

   tableau de variation de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-4	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

   (c)
   - Sur $[0; 1]$, g est décroissante et $g(0) = -4$, donc, pour tout x de $[0; 1]$: $g(x) \leq -4 < 0$, donc g ne s'annule pas sur $[0; 1]$.
   - g est strictement croissante et continue sur $[1; +\infty[$.
     De plus $g(1) = -6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc 0 appartient à $[g(1); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$.
     Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1; +\infty[$.
   - Des deux paragraphes précédents, on déduit qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   - $g(2,19) \approx -0,07$, $g(2,20) \approx 0,05$ et $g(\alpha) = 0$. Donc $g(2,19) < g(\alpha) < g(2,20)$.
     Or g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, donc $2,19 < \alpha < 2,20$.

   (d)
   - On a vu à la question précédente que pour tout x de $[0; 1]$, $g(x) < 0$.
   - g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$, donc pour tout x de $[1; \alpha[$, $g(x) < 0$ et pour tout x de $[\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$.

   On en déduit le signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) • **Limite en $+\infty$:**
   Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$, $f(x) = \dfrac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{(1-\frac{1}{x^2})}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \underline{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

• **Limite en 1 :**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x^2-1)=0^-\\ \lim\limits_{x\to1}(x^3+2x^2)=3\end{array}\right\}\text{ donc } \underline{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=-\infty}\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x^2-1)=0^+\\ \lim\limits_{x\to1}(x^3+2x^2)=3\end{array}\right\}\text{ donc } \underline{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=+\infty}$$

(b) f est dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}=\frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2},$$

donc $\quad$ $\underline{\text{pour tout } x \text{ de } [0;1[\cup]1;+\infty[\ :\ f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}}$.

(c) Pour tout réel x, $(x^2+1)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$. Du signe de g trouvé à la question 2)c), on déduit le tableau de signe, puis le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
x	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$xg(x)$	0	$-$	0	$+$	

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout x de $[0;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)-(x+2)=\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$.

x	0		1		$+\infty$
$x+2$		$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)-(x+2)$		$-$	$\Vert$	$+$	

- pour tout x de $[0;1[$, $f(x)-(x+2)<0$, c'est à dire $f(x)<x+2$.
  $\underline{\mathcal{C} \text{ est en-dessous de } \mathcal{D} \text{ sur } [0;1[}$.
- pour tout x de $]1;+\infty[$, $f(x)-(x+2)>0$, c'est à dire $f(x)>x+2$.
  $\underline{\mathcal{C} \text{ est au-dessus de } \mathcal{D} \text{ sur }]1;+\infty[}$.

Exercice 4

1. C est un point commun aux deux plans (CFH) et (ACG).
   I appartient à $[HF]$, donc appartient au plan (CFH) et I appartient à $[EG]$, donc appartient au plan (ACG), donc I est un point commun aux deux plans (CFH) et (ACG).
   Les deux plans (CFH) et (ACG) sont donc sécants suivant la droite (CI).
2. (CI) et (AE) sont coplanaires dans le plan (ACG), et ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes en un point J.
3.
   - $[EG]$ et $[AC]$ sont deux diagonales de deux faces du cube, donc $EG=AC$. De plus I est le milieu de $[EG]$, donc $EI=\frac{1}{2}EG$. On en déduit que $EI=\frac{1}{2}AC$.
   - Par ailleurs, le plan (ACG) coupe les deux plans parallèles (EFG) et (ABC) suivant deux droites parallèles, donc les droites (EG) et (AC) sont parallèles.
   - Dans le triangle ACJ, E est un point de $[AJ]$, I est un point de $[CJ]$ et les droites (EI) et (AC) sont parallèles. En utilisant le théorème de Thalès $\dfrac{JE}{JA}=\dfrac{EI}{AC}$. Or on a vu que $EI=\frac{1}{2}AC$, donc $\dfrac{JE}{JA}=\frac{1}{2}$. Puisque E appartient $[AJ]$, on en déduit que E est le milieu de $[AJ]$.