

Chapitre 10 : Vecteurs : deuxième partie

Vecteurs colinéaires. Applications.

I Rappels sur les coordonnées d'un vecteur

Propriété

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors,

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $(x = x' \text{ et } y = y')$.
Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
2. Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
3. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Théorème

Dans un repère du plan, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.

Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Définition (et propriété)

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB , notée aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Pour un vecteur $\vec{u}$, on note sa norme $\|\vec{u}\|$.

Dans un repère ORTHONORMÉ, on a :

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

II Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Dans un repère du plan, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Soit k un réel.

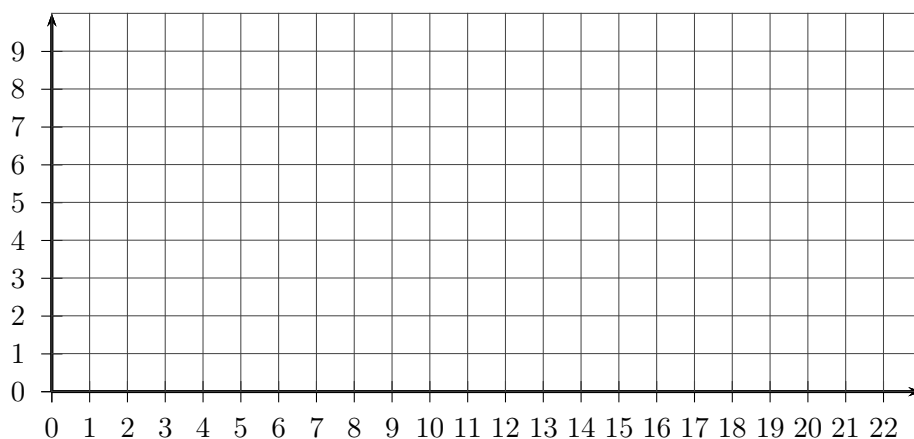
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Exercice 1

Dans un repère du plan, on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $3\vec{u}$ et $-2\vec{w}$.
2. Représenter tous ces vecteurs dans le repère ci-dessous



Propriété (règles de calcul)

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et les réels k et k' , on a :

1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$,
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$,
3. $(k \times k')\vec{u} = k(k'\vec{u})$,
4. $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque

On notera que les règles de calcul sont les mêmes que pour la multiplication et l'addition avec les nombres réels.

Exercice 2

Dans un repère du plan, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $-\frac{5}{3}\vec{u}$
2. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$

Exercice 3

Dans un repère du plan, on donne le point $A(1;7)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\vec{u}$.
2. Placer A et M et représenter les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 4 (calcul mental)

Dans un repère du plan, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Donner les coordonnées du vecteur :

1. $3\vec{u} - 4\vec{v}$
2. $-\vec{u} + 2\vec{v}$

Exercice 5 (calcul mental)

On considère des points $A, B, \dots, H$ régulièrement placés sur une droite. Compléter avec un nombre réel.



$$\begin{array}{lll}
1. \overrightarrow{DA} = \dots \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{DE} = \dots \overrightarrow{AE} & \overrightarrow{AE} = \dots \overrightarrow{CD} \\
2. \overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{AE} & \overrightarrow{EC} = \dots \overrightarrow{CH} & \overrightarrow{EH} = \dots \overrightarrow{AH}
\end{array}$$

Exercice 6 (utilisation de la relation de Chasles)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer le point C sur la droite (AB) .

Exercice 7 (Construction de point. Relation de Chasles)

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.
3. Placer F défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$
4. Placer G tel que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AC}$.
5. Placer H tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{0}$.

III Colinéarité de vecteurs. Applications

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls (tous les deux).

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Remarque

Deux vecteurs colinéaires (non nuls) ont leurs coordonnées proportionnelles.

Exercice 8

On se place dans un repère du plan.

Reconnaître les vecteurs colinéaires parmi les vecteurs suivants, et le cas échéant, donner une relation de la forme $\vec{v} = k\vec{u}$.

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{e} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Théorème (caractérisation analytique de la colinéarité)

Dans un repère du plan, on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et se note $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration

1. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le résultat est évident.

Sinon, il existe alors un réel k tel $\vec{v} = k\vec{u}$. Ainsi, $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Alors, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.

On a montré que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.

2. Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$ (*).

Alors, $xy' = yx'$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

On peut donc supposer que $\vec{u}$ est non nul. Cela signifie que l'une de ses coordonnées $(x; y)$ est non nulle. Par exemple, supposons que ça soit $x : x \neq 0$.

La relation (*) peut alors s'écrire $y' = \frac{x'}{x}y$. En posant $k = \frac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$, et on a également $x' = kx$.

Ainsi, $\vec{v} = k\vec{u}$, et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Donc si $xy' - yx' = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. $\square$

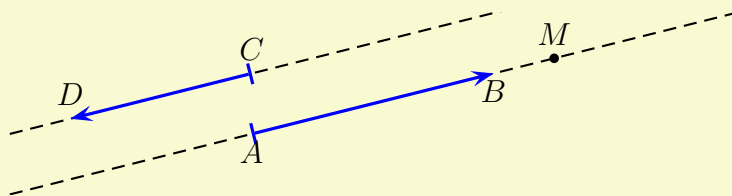
Exercice 9

Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ a \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Propriété (Applications)

1. Soient A, B, C , et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



2. Les points A, B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires.

Exercice 10

On se place dans un repère du plan. On considère les points $A(3; 1)$, $B(0; 2)$, $C(4; -1)$ et $D(-5; 2)$.

- Étudier si les points A, B et C sont alignés.
- Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Que peut-on déduire des questions 1 et 2 ?

Définition (nouvelle définition d'un repère du plan)

On définit un repère du plan par la donnée d'un triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où O est un point, et $\vec{i}, \vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls).

Alors, les coordonnées d'un point M sont l'unique couple $(x; y)$ de réels tels que

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

