2de. Correction du devoir maison n° 5.

Exercice 1

L'enneigement de la station de sports d'hiver de L'Alpe d'Huez durant la saison de ski 2008 est indiqué par la hauteur de neige moyenne, exprimée en cm, relevée chaque semaine.

Hauteur (en cm)	50	100	120	130	140	160	180	200	240	260
Nombre de semaines	1	2	1	1	1	6	1	3	3	3

1. Combien de semaines dure la saison de ski ? Justifier.
   On calcule l'effectif total.
   $N = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 3 + 3 + 3 = 22.$
   $\boxed{\text{La saison de ski dure 22 semaines.}}$
2. Le mode d'une série est la valeur qui a le plus grand effectif. Quel est le mode de cette série ?
   $\boxed{\text{Le mode de la série est 160 car la hauteur de neige la plus fréquente est 160 cm.}}$
3. Déterminer la hauteur de neige moyenne.
$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}\\ &= \frac{50 + 2 \times 100 + 120 + 130 + 140 + 6 \times 160 + 180 + 3 \times (200 + 240 + 260)}{22}\\ &= \frac{3880}{22}\\ &\approx 176.4\end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La hauteur de neige moyenne est d'environ 176.4 cm.}}$
4. Déterminer la médiane de la série.
   L'effectif est pair, $N = 22 = 2 \times 11$.
   La médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, qui sont la 11^e^ et la 12^e^. Donc $Me = \dfrac{x_{11} + x_{12}}{2} = \dfrac{160 + 160}{2} = 160.$
   $\boxed{\text{La hauteur de neige médiane est de 160 cm.}}$
5. Pour la pratique du ski dans les meilleures conditions, la hauteur de neige doit être de 140 cm au moins.
   Peut-on affirmer que l'on a pu skier dans les meilleures conditions pendant plus de la moitié de la saison ? Justifier.
   Comme $Me = 160$, il y a eu au moins 50% des semaines où la hauteur de neige a été supérieure ou égale à 160 cm.
   $\boxed{\text{A fortiori, la hauteur de neige a été au moins de 140 cm pendant plus de la moitié de la saison.}}$
6. Déterminer le pourcentage de semaines où la hauteur de neige a été supérieure ou égale à 2 m.
   $\dfrac{3 + 3 + 3}{22} \times 100 \approx 40.9.$
   $\boxed{\text{40.9 \% des semaines ont eu un enneigement de 2 m ou plus.}}$
7. Calculer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3.
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{22}{4} = 5.5.$
   Q_1 est la 6^e^ valeur : $\boxed{Q_1 = 140}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{3 \times 22}{4} = 16.5.$
   Q_3 est la 17^e^ valeur : $\boxed{Q_3 = 240}$
8. Interpréter ces résultats.
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Au moins 25\% des semaines ont eu une hauteur de neige inférieure ou égale à 140 cm.}\\ \text{Au moins 75\% des semaines ont eu une hauteur de neige inférieure ou égale à 240 cm.}\end{array}}$

9. Interpréter l'intervalle interquartile $[Q_1; Q_3]$.
   $\boxed{\text{Au moins 50 \% des semaines ont eu un enneigement compris entre 140 et 240 cm.}}$

Exercice 2
On considère la série statistique suivante formée de 10 valeurs rangées dans l'ordre croissant.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur	2	2	**4**	**5**	**5**	7	**9**	**9**	**16**	**16**

Compléter les valeurs pour que la série ait les propriétés suivantes :
l'étendue est 14, $Q_3 = 9$, l'écart interquartile est 5, la médiane est 6, et la moyenne est la plus grande possible.
Justifier les choix.
L'étendue est 14. $Max - Min = 14$, donc $Max = 14 + 2 = 16$. La 10^e valeur est 16.
$\dfrac{10}{4} = 2,5$, donc Q_1 est la 3^e valeur.
$\dfrac{3 \times 10}{4} = 7,5$, donc Q_3 est la 8^e valeur : la 8^e valeur est 9.
Comme l'écart interquartle est 5, $Q_1 = 9 - 5 = 4$: la 3^e valeur est 4.
La médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales : la 5^eet la 6^e.
$6 = \dfrac{x_5 + 7}{2}$, donc $x_5 = 2 \times 6 - 7 = 12 - 7 = 5$.
La 5^e valeur est 5.
Enfin, on complète pour rendre la moyenne la plus grande possible.

Exercice 3
Voici une série de notes entières de moyenne 12 :

$$10; 5; 15; 13; 18; 14; 15; 8; 13; 6; 15$$

Les questions portent toutes sur cette série initiale.

1. Supprimer une note pour que la moyenne diminue, mais le moins possible.
   Commençons par ranger les valeurs dans l'ordre croissant : 5,6,8,10,13,13,14,15,15,15,18.
   La moyenne de la série est de 12.
   On supprime donc la note la plus proche de 12 parmi les notes supérieures à 12.
   $\boxed{\text{On supprime un 13.}}$
2. En modifiant deux notes, peut-on garder la même moyenne et augmenter la médiane de 1 ?
   $\boxed{\text{Il suffit de remplacer les deux 13 par 12 et 14.}}$
   En effet, comme $12 + 14 = 13 + 13$, cela ne changera pas la moyenne.
   $N = 11 = 2 \times 5 + 1$, impair, la médiane est la valeur centrale, qui est la 6^e valeur.
   Par contre, on fait augmenter la médiane de 1 en remplaçant la 6^e valeur (le 2^e 13) par 14.

Exercice 4
On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?
Sur la série de départ, à l'aide de la calculatrice, on obtient comme moyenne $\overline{x} \approx 11,11$.
L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.
Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.
On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.
$\boxed{\text{On remplace donc le 17 par un 10.}}$