Correction de l'interrogation n° 6
Sujet 1

Exercice 1 (7 points)

1. Compléter le tableau des dérivées des fonctions. Aucune justification n'est demandée.

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
$f(x) = \dfrac{1}{5}$	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = -12x + 4$	$f'(x) = -12$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(5x - \pi)$	$f'(x) = -5\sin(5x - \pi)$	$I = \mathbb{R}$

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

   (a) Pour tout $x > 4$, $f(x) = \dfrac{5}{2x-8}$.

   $\boxed{f'(x) = 5 \times \dfrac{-2}{(2x-8)^2} = \dfrac{-10}{(2x-8)^2}.}$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+7) \times \sin(x)$.

   $\boxed{f'(x) = 2\sin x + (2x+7) \times \cos x.}$

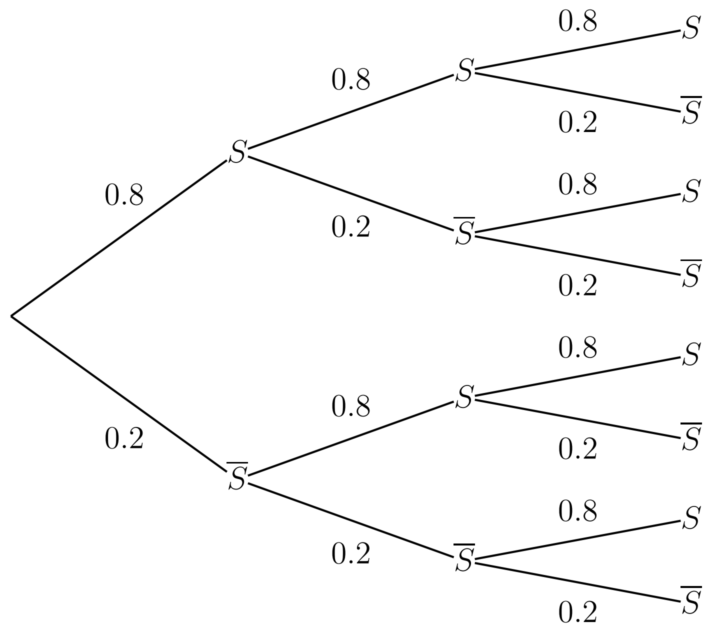
   (c) Pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{5x-4}{x-2}$.

   $\boxed{f'(x) = \dfrac{5(x-2) - (5x-4) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-6}{(x-2)^2}.}$

Exercice 2 (5 points)

Alain, joueur de tennis confirmé, rencontre ses partenaires de club. Sa probabilité de succès contre ces joueurs est de 0,8. Il fait trois matchs consécutifs et les résultats de ses matchs sont indépendants les uns des autres.

1. Construire un arbre pondéré associé à cette situation.



2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès sur les trois matchs joués.

   (a) X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. Préciser les paramètres n et p de cette loi.

   $\boxed{\text{On a } n = 3 \text{ et } p = P(S) = 0,8.}$

   (b) Calculer la probabilité pour qu'il remporte exactement deux matchs.

   $P(X=2) = P(S;S;\overline{S}) + P(S;\overline{S};S) + P(\overline{S};S;S)$.

   $P(X=2) = 3 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$.

   $\boxed{\text{La probabilité pour qu'il remporte deux matchs est de 0,384.}}$

   (c) Calculer la probabilité pour qu'il remporte au moins deux matchs.

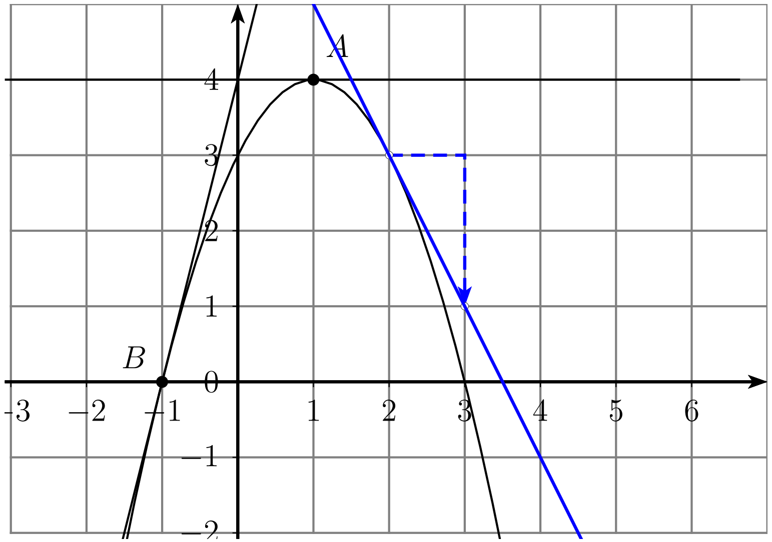
   $P(X \geqslant 2) = P(X=2) + P(X=3)$

   $P(X \geqslant 2) = 0,384 + P(S;S;S) = 0,384 + 0,8^3 = 0,896$.

   $\boxed{\text{La probabilité qu'il remporte au moins deux matchs est de 0,896.}}$

Exercice 3 (5 points)

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, et deux tangentes à cette courbe. La tangente à la courbe au point A est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Lire graphiquement $f(-1)$ et $f(1)$. Aucune justification n'est attendue.
   $\boxed{f(-1) = 0 \text{ et } f(1) = 4.}$
2. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(1)$. Justifier.
   $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse -1. $\boxed{f'(-1) = 4.}$
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 1. $\boxed{f'(1) = 0.}$
3. On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
   (a) Déterminer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2x + 2.}$
   (b) Retrouver par le calcul les valeurs de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   $f(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0.$
   $f'(-1) = -2 \times (-1) + 2 = 4.$
   $\boxed{\text{On trouve bien } f(-1) = 0 \text{ et } f'(-1) = 0.}$
   (c) Vérifier que $f'(2) = -2$, et tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. On fera apparaître les traits de construction.
   $\boxed{f'(2) = -2 \times 2 + 2 = -2.}$
   La tangente au point d'abscisse a donc pour coefficient directeur -2.

Exercice 4 (3 points)

On pose $f(x) = \sin(x)$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{3}$.

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$. Donc $f'(\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

$y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

La tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{3}$ a pour équation

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Exercice 5 (2 points)

On pose, pourt tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right).$
2. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{3}$ est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? Justifier.
   On a donc $f'(\frac{\pi}{3}) = 3 \times \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 3 \times 0 = 0.$
   $\boxed{\text{Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse } \frac{\pi}{3} \text{ est 0, donc cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.}}$

Sujet 2

Exercice 6 (7 points)

1. Compléter le tableau des dérivées des fonctions. Aucune justification n'est demandée.

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
$f(x) = -\frac{1}{3}$	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = 7x - 4$	$f'(x) = 7$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(2x + 5\pi)$	$f'(x) = 2\cos(2x + 5\pi)$	$I = \mathbb{R}$

2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

   (a) Pour tout $x > 3$, $f(x) = \dfrac{7}{2x-6}$.

   $\boxed{f'(x) = 7 \times \dfrac{-2}{(2x-6)^2} = \dfrac{-14}{(2x-6)^2}.}$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (3x+1) \times \cos(x)$.
   $f'(x) = 3\cos(x) + (3x-1) \times (-\sin x)$
   $\boxed{f'(x) = 3\cos(x) - (3x-1)\sin(x).}$

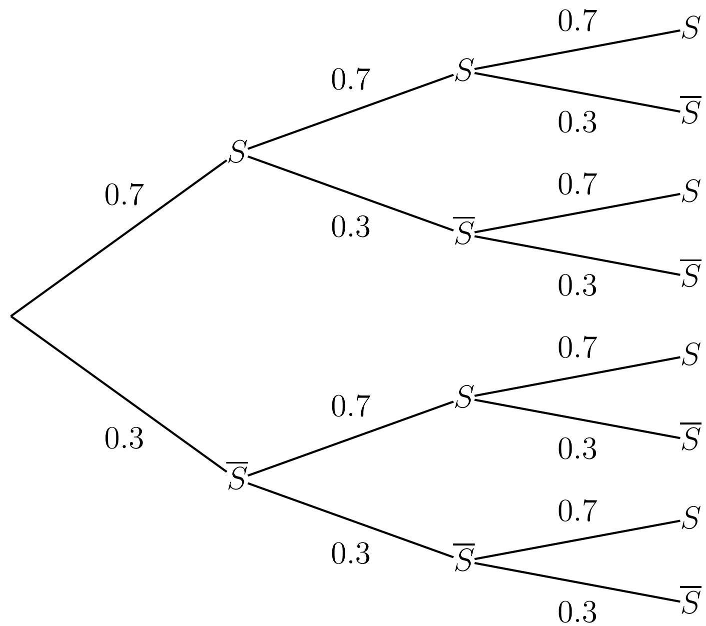
   (c) Pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

   $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(x-2) - (2x+3) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-7}{(x-2)^2}.}$

Exercice 7 (5 points)

Alain, joueur de tennis confirmé, rencontre ses partenaires de club. Sa probabilité de succès contre ces joueurs est de 0,7. Il fait trois matchs consécutifs et les résultats de ses matchs sont indépendants les uns des autres.

1. Construire un arbre pondéré associé à cette situation.



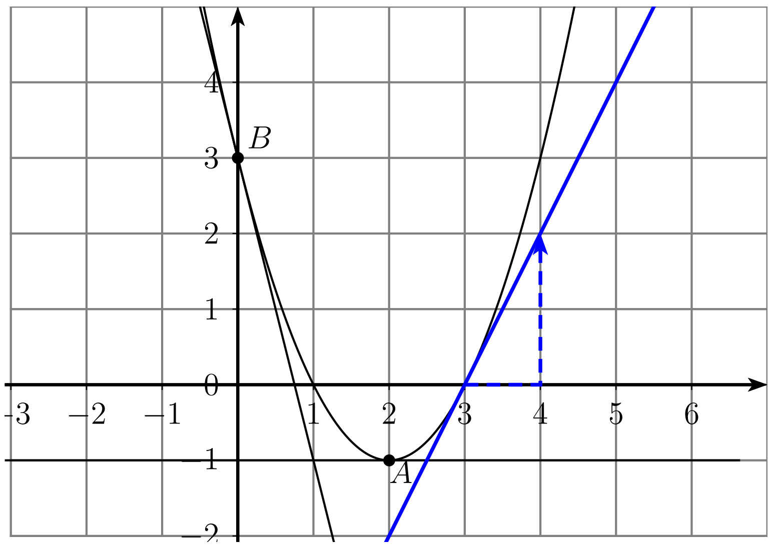
2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès sur les trois matchs joués.

   (a) X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$. Préciser les paramètres n et p de cette loi.
   $\boxed{n = 3 \text{ et } p = 0,7.}$

   (b) Calculer la probabilité pour qu'il remporte exactement un match.
   $P(X = 1) = P(S; \overline{S}; \overline{S}) + P(\overline{S}; S; \overline{S}) + P(\overline{S}; \overline{S}; S)$.
   $P(X = 1) = 3 \times 0,7 \times 0,3^2 = 0,189$.
   $\boxed{\text{La probabilité pour qu'il remporte un seul match est de 0,189.}}$

   (c) Calculer la probabilité pour qu'il remporte au plus un match.
   $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.
   $P(X \leqslant 1) = P(\overline{S}; \overline{S}; \overline{S}) + 0,189$.
   $P(X \leqslant 1) = 0,3^3 + 0,189 = 0,216$.
   $\boxed{\text{La probabilité pour qu'il remporte au plus un match est de 0,216.}}$

Exercice 8 (5 points)
On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, et deux tangentes à cette courbe. La tangente à la courbe au point A est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Lire graphiquement $f(0)$ et $f(2)$. Aucune justification n'est attendue.
   $\boxed{f(0) = 3 \text{ et } f(2) = -1.}$
2. Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$. Justifier.
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point B d'abscisse 0. $\boxed{f'(0) = -4.}$
   $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 2. $\boxed{f'(2) = 0.}$
3. On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
   (a) Déterminer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 4.}$
   (b) Retrouver par le calcul les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.
   $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$, et $f'(2) = 2 \times 2 - 4 = 0$.
   $\boxed{\text{On retrouve } f(2) = -1 \text{ et } f'(2) = 0.}$
   (c) Vérifier que $f'(3) = 2$, et tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3. On fera apparaître les traits de construction.
   $\boxed{f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.}$
   Donc la tangente au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 2.

Exercice 9 (3 points)
On pose $f(x) = \cos(x)$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$.

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$. Donc $f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$y = f'(a)(x-a)+f(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}$.

> La tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ a pour équation
> $$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 10 (2 points)
On pose, pourt tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? Justifier.
   On a donc $f'(\frac{\pi}{3}) = 3 \times \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) = 3\cos\frac{3\pi}{2} = 3 \times 0 = 0$.
   > Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ est 0, donc cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.