T7 S - T8 S Mercredi 11 Octobre 2017

NOM :

Prénom :

Contrôle n° 1

Exercice 1 (2 points)

Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes. Justifier.

1. $u_n = (5n^2 + 3)(2 - 1,8^n)$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3 + \cos(n)}{n}$.

Exercice 2 (4,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
$$u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Soit (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 3 (6,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par
$$v_n = u_n - n + 1.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

4. Compléter l'algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} > 10\,000$. On ne demande pas la valeur de n_0.

Traitement
Affecter à N la valeur ...
Affecter à U la valeur ...
Tant que ...
...
...
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

Exercice 4 (3 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z^2 - 5z + 3 = 0$.
2. $(z + 3 - \mathrm{i})(\overline{z} + 8 - \mathrm{i}) = 0$.
3. $9\mathrm{i}z = 5\overline{z} - 3 + 4\mathrm{i}$.

Exercice 5 (2,5 points)
Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y des nombres réels.

Pour tout $z \neq -2 - \mathrm{i}$, on pose $Z = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$.

1. Mettre Z sous forme algébrique.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
   Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que Z soit réel.

Exercice 6 (1,5 point)
Les nombres complexes $z_1 = \left(1 - \dfrac{3}{13}\mathrm{i}\right) \times (2 + 5\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{7 - \mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}}$ sont-ils conjugués ? Justifier.

Exercice 7 (Bonus - 2 points)

1. Déterminer la limite de la suite (V_n) définie par $V_n = n^2 - \sqrt{n}$.
2. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Indication : on pourra montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.