BTS – Équations différentielles du second ordre

Définition
Soient a, b, c des nombres réels, avec $a \neq 0$, et d une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note y la fonction inconnue, définie et dérivable sur I.
L'équation (E) : $ay'' + by' + cy = d$ est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
L'équation (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$ est appelée équation homogène (ou sans second membre) associée à (E).
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue r est appelée équation caractéristique associée à (E).

I Résolution de l'équation homogène (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$

Théorème
On considère l'équation homogène $ay''+by'+cy = 0$ et son équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
   Les solutions de E_0 sont les fonctions de la forme $y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{r_0 t}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
   Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions $y(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$
2. $y'' - y' - 2y = 0$
3. $y'' + y' + y = 0$

Réponses :
a) $y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{2t}$
b) $y(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{2t}$
c) $y(t) = \mathrm{e}^{-t/2}(A\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t) + B\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t))$

II Résolution de l'équation avec second membre (E) : $ay'' + by' + cy = d$

Théorème
Les solutions de l'équation $(E) : ay'' + by' + cy = d$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière y_p de (E) à la solution de générale de l'équation homogène associée (E_0).

Remarque
De plus, si l'on fixe une condition initiale $y(t_0) = u$, et $y'(t_0) = v$ alors la solution est unique.

Recherche d'une solution particulière de (E).
On se limite à $d(t) = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où P est une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$
On cherche une solution sous la forme $y(t) = Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où Q est un polynôme

1. Si $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$, on choisit Q de même degré que P.
2. Si α est racine de l'équation caractéristique $(a\alpha^2 + b\alpha + c = 0)$, alors :
   (a) Si $2a\alpha + b \neq 0$, on choisit Q de degré $\deg P + 1$
   (b) Si $2a\alpha + b = 0$ ($\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ est racine double), on choisit Q de degré $\deg P + 2$

Exercice 2
$y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^t$, avec la condition $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. .

1. Équation homogène :
   $r^2 + 2r + 1$ a pour racine double -1. D'où $y_H(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-t}$
2. Solution particulière : sous la forme $Q(t)\mathrm{e}^t$, avec $Q(t) = at+b$ on trouve $y_0(t) = \dfrac{1}{4}(t-1)\mathrm{e}^t$.
3. Forme générale des solutions
   $y(t) = \dfrac{1}{4}(t-1)\mathrm{e}^t + (At + B)\mathrm{e}^{-t}$
4. Condition initiale : $y(t) = \dfrac{1}{4}(t-1)\mathrm{e}^t + \dfrac{1}{4}(9t + 5)\mathrm{e}^{-t}$

Propriété (Principe de superposition)
Si y_1 est une solution de $ay'' + by' + cy = d_1$, et si y_2 est une solution de $ay'' + by' + cy = d_2$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.

Exercice 3

1. $y'' + y = \cos x$
2. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + x^2 + 1$

Réponses :
a) $y(x) = \dfrac{1}{2}x\sin x + A\cos x + B\sin x$
b) $y(x) = (Ax + b)\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2 + 4x + 7$.