Lycée Camille Pissarro

BAC BLANC 2 2018

Mathématiques - Enseignement obligatoire

Série S

Durée épreuve : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comporte six pages numérotées de 1 à 6.
Il est composé de quatre exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision de raisonnement entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)
Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

   On considère les évènements suivants :
   - J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
   - C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

   (a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

   (b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

   (c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0,695.

   (d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

   (a) Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

   (b) Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.
Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.
Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

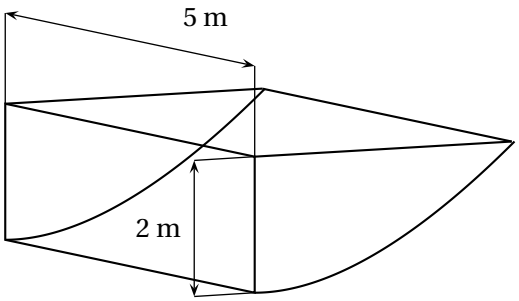
   Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

Exercice 2 (6 points)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

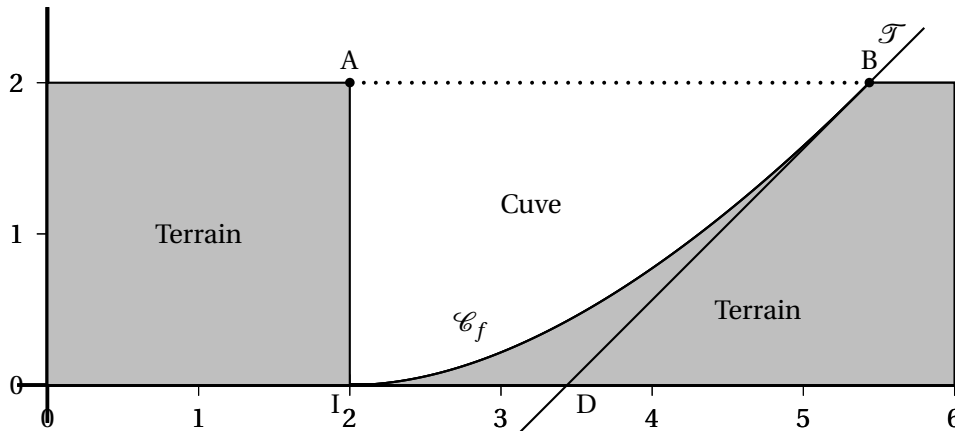
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



Cette cuve est schématisée ci-contre.
La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e] définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.
2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   (b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\text{e}$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. (a) Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

(b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e].

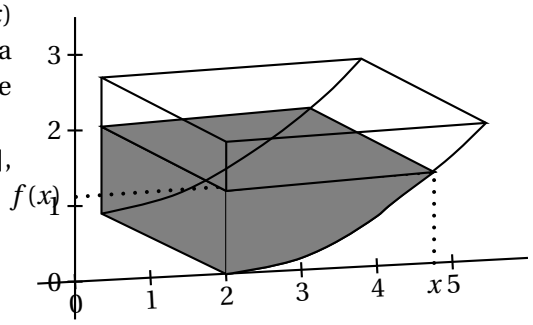
(c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.

Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c) < V/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

Exercice 3 (4 points)

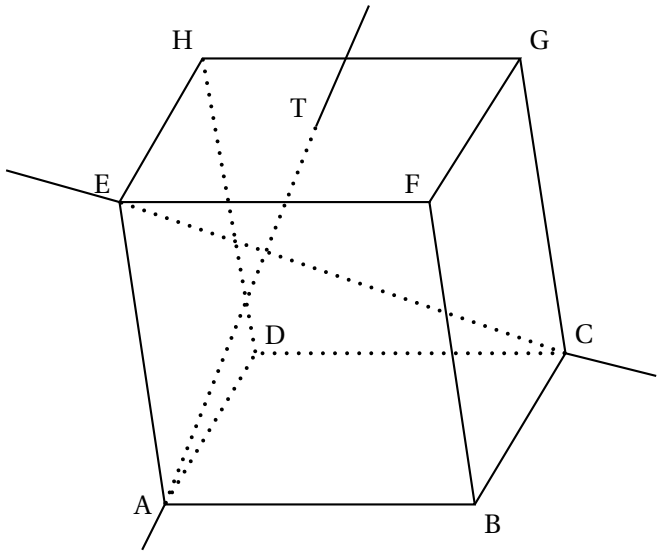
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2\mathrm{i}, \quad b = -\sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad c = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad e = -1+\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).
   Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 6-2t \\ z = -2+t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



   Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

Exercice 4 (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n. \end{cases}$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0{,}01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	