1G. Interrogation n° 11
Correction du sujet 2

Exercice 1 (cours, 5,5 points)
Compléter sur l'énoncé :

1. Énoncer 5 propriétés de la fonction exponentielle (dérivée, signe, variation, relation fonctionnelle, propriétés, etc)
   a) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x$\in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
   b) $\mathrm{e}^0 = 1$
   c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$
   d) Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
   e) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Relation d'Al-Kashi dans le triangle quelconque.
   Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = AC$, et $c = AB$.
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
3. Compléter.
   (a) Dans un repère orthonormé du plan, une équation du cercle de centre $\Omega(2; -7)$ et de rayon $3 > 0$ est :
   $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 9$
   (b) Dans un repère orthonormé du plan, soit (d) la droite d'équation
   $$6x + 13y + 2 = 0.$$
   Le vecteur $\overrightarrow{n}(6; 13)$ est un vecteur normal à (d).
   Le vecteur $\overrightarrow{u}(-13; 6)$ est un vecteur directeur de (d).

Exercice 2 (4 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-5}{2\mathrm{e}^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le dénominateur ne s'annule pas.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.
   $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1 \times (2\mathrm{e}^x) - (x-5) \times 2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x(1 - x + 5)}{4(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{6-x}{2\mathrm{e}^x}$.

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   Comme $2 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $6 - x$.
   $6 - x = 0$ ssi $x = 6$, et $6 - x$ est une expression de fonction affine avec $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$1/(2\mathrm{e}^6)$	$\searrow$	

$f(6) = \dfrac{6-5}{2\mathrm{e}^6} = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^6} = \dfrac{\mathrm{e}^{-6}}{2}$

Exercice 3 (4,5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Écrire sous la forme e^K où K est une expression de x.
   $A(x) = \dfrac{e(e^{-3x})^2}{e^{5x}}$
   $\boxed{A(x) = \dfrac{e(e^{-3x})^2}{e^{5x}} = \dfrac{e^1 \times e^-6x}{e^{5x}} = e^{1-6x-5x} = e^{1-11x}}$
2. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de l'expression $B(x) = 7e^x - xe^x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = e^x(7 - x)$.
   Or, $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $B(x)$ a le même signe que $7-x$, expression affine avec $a = -1 < 0$.
   $7 - x = 0$ ssi $x = 7$.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(e^x - e^2)(e^{-x} + 1) = 0$.
   $(e^x - e^2)(e^{-x} + 1) = 0$ ssi $e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 1 = 0$.
   $e^x - e^2 = 0$ ssi $e^x = e^2$ ssi $x = 2$.
   Comme une exponentielle est toujours strictement positive, l'équation $e^{-x} + 1 = 0$ n'a pas de solution.
   Donc l'équation admet une seule solution qui est 2.

Exercice 4 (6 points)
Dans chaque cas, choisir la ou les bonnes réponses. Aucune justification n'est demandée.
Dans un repère orthonormé, on considère la droite (d) d'équation $2x + 5y - 1 = 0$, et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-5; 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Un vecteur normal à (d) est :

   a. $\vec{n}(5; 2)$ $\boxed{\textbf{b. } \vec{n}(-2; -5)}$ **c.** $\vec{n}(-5; 2)$ **d.** Aucune de ces propositions

2. Une équation de droite perpendiculaire à (d) est :

   $\boxed{\textbf{a. } -5x + 2y = 0}$ **b.** $2x - 5y + 3 = 0$
   $\boxed{\textbf{c. } 5x - 2y + 1 = 0}$ **d.** $2x + 5y + 7 = 0$

3. Le point d'intersection de d avec l'axe des abscisses est :

   $\boxed{\textbf{a. } A\left(\frac{1}{2}; 0\right)}$ **b.** $B\left(0; \frac{1}{5}\right)$ **c.** $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **d.** Aucune de ces propositions

4. Une équation de $\mathscr{C}$ est :

   a. $x^2 - 10x + y^2 + 2y + 24 = 0$ **b.** $x^2 + y^2 + 25 = 2$
   c. $x + 5 + y - 1 = \sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{d. Aucune de ces propositions}}$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^{-x} + 1)(e^x - 1)$ est égal à :

   a. $e^{-2x} - 1$ $\boxed{\textbf{b. } e^x - e^{-x}}$ $\boxed{\textbf{c. } e^x(1 - e^{-2x})}$ **d.** 0

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (1 - x)e^x$. L'expression de la dérivée de f est :

   $\boxed{\textbf{a. } -xe^x}$ **b.** $(x - 1)e^x$ **c.** $-e^x$ **d.** $(x - 2)e^x$