TP : Application de l'approximation affine à la recherche de la courbe intégrale d'une fonction par la méthode d'Euler.

Présentation de la méthode d'Euler

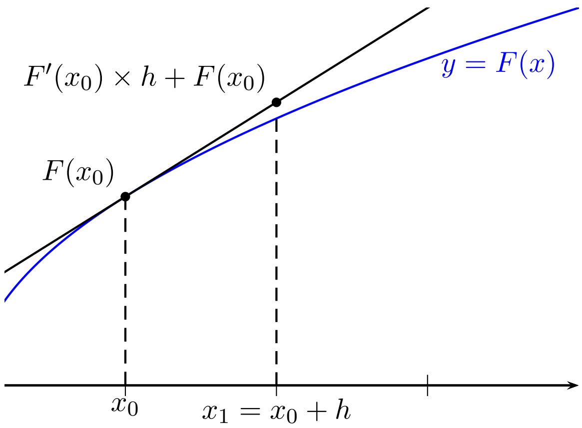
Soit f une fonction donnée. L'objectif est de construire la courbe d'une fonction dérivable F telle que $F' = f$ et dont on connaît l'image d'un point $F(x_0)$.

Rappel : Soit F une fonction dérivable en a. On sait que $F'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(a+h) - F(a)}{h}$.
Ainsi, pour h proche de 0,

$$F(a+h) \approx F'(a) \times h + F(a).$$

Il suffit donc de connaître $F(a)$ et $F'(a)$ pour pouvoir proposer une valeur approchée de $F(a+h)$.
On fixe une valeur de h.
L'image $F(x_0)$ d'un réel x_0 étant donnée, on trouve une valeur approchée de $F(x_0 + h)$ par

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) &\approx F'(x_0) \times h + F(x_0) \\ &\approx f(x_0)h + F(x_0) \end{aligned}$$



En posant $x_1 = x_0 + h$, on a une valeur approchée de $F(x_1)$, ce qui permet de trouver une valeur approchée de $F(x_1 + h)$:

$$\begin{aligned} F(x_1 + h) &\approx F'(x_1)h + F(x_1) \\ &\approx f(x_1)h + F(x_1) \end{aligned}$$

En posant $x_2 = x_1 + h$, on a obtenu une approximation de $F(x_2)$, et on réitère le procédé de proche en proche.

Premier exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$.
On cherche à construire de manière approchée la courbe d'une fonction F dérivable sur l'intervalle $[1; 5]$ et telle que :

$$F(1) = \frac{2}{3} \text{ et pour tout } x \in [1; 5],\ F'(x) = \sqrt{x}.$$

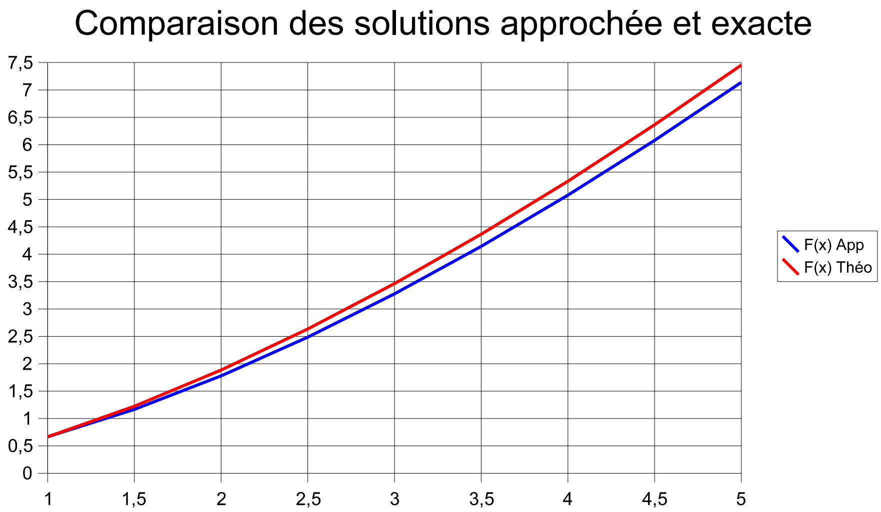
$F(1)$ est donné.
Par exemple, en prenant $h = 0.5$, on peut déterminer une valeur approchée de $F(1 + 0.5)$:
$F(1.5) = F(1 + 0.5) \approx F'(1) \times 0.5 + F(1) \approx 1,17$
Compléter de même :
$F(2) \approx F'(1.5) \times 0.5 + F(1.5) \approx \ldots$
$F(2,5) \approx \ldots$

1. A l'aide d'un tableur, (Open Office Calc) construire le tableau de valeurs de la fonction solution F_{app} obtenue par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.5$.

2. En déduire la courbe représentative de cette fonction sur $[1;5]$.

3. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est solution du problème.
   .
   .
   .
   .
   .

4. Construire sur un même graphique les courbes de F_{app} et F sur $[1;5]$.



   En rouge, la courbe de la solution exacte théorique : $x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
   En bleu, la courbe de la solution approchée obtenue par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.5$.

5. Reproduire le raisonnement en diminuant le pas h, par exemple $h = 0.1$.

Deuxième exemple : $f(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$, et $F(0) = 0$ Ici, on pose $f(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$.

1. Construire de manière approchée la courbe d'une fonction F dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ et telle que :
$$F'(x) = f(x) \text{ et } F(0) = 0.$$

2. Vérifier que la fonction F qui a pour expression $F(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x$ est la solution exacte du problème.
   .
   .
   .
   .

3. Comparer les deux courbes sur un même graphique.

Quelques indications pour tracer un graphique à partir d'un tableau de valeurs dans Open Office Calc :

1. donner un nom aux colonnes du tableau de valeurs, les noms seront repris dans la légende du graphique en sélectionnant ces cases (par exemple F(x) app et F(x) théo).
2. dans le menu **Insertion**, choisir **diagramme**.
3. choisir la sélection à partir de laquelle on construit un graphique, cocher première ligne et première colonne comme étiquette,
4. sélectionner le type de graphique (le premier), suivant.