Chapitre 3 : Nombres complexes

I Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition (et théorème)
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que ...
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
3. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique ....
....
4. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Définition
L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple :
Soit $z = 5 - 7\mathrm{i}$.
La partie réelle de z est $a = \ldots$.
La partie imagiaire de z est $b = \ldots$.

Remarque

1. Lorsque $b = 0$, $z = a$, c'est un nombre réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
2. Lorsque $a = 0$, $z = \mathrm{i}b$, et l'ont dit que z est imaginaire pur.

Exemple :
Soit $z = 3 - 8\mathrm{i}$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 3$, et $\mathrm{Im}(z) = -8$.
Le nombre 3i est imaginaire pur ($a = 0$ et $b = 3$).

Exercice 1
Identifier la partie réelle a et la partie imaginaire b des nombres complexes suivants.

1. $z = 1 - 6\mathrm{i}$ ....
2. $z = 2 + \mathrm{i}$ ....
3. $z = -4$ ....
4. $z = -7\mathrm{i}$ ....
5. $z = \dfrac{5 - 7\mathrm{i}}{3}$ ....

II Conjugué d'un nombre complexe. Opérations sur les nombres complexes

Définition (conjugué : $\overline{z}$)
Soit $z = a + \mathrm{i}b$, avec a, b réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = \ldots$

Exemple :
$\overline{3+5\text{i}} = 3 - 5\text{i}$.

Exercice 2
Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants.

1. $z = 1 - 6\text{i}$ ....
2. $z = 2 + \text{i}$ ....
3. $z = -4$ ....
4. $z = -7\text{i}$ ....
5. $z = \dfrac{5-7\text{i}}{3}$ ....

Remarque
Pour tout nombre complexe, $\overline{\overline{z}} = z$.

Propriété (admise)
L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

Remarque
On a $\text{i}^2 = -1$, $\text{i}^3 = -\text{i}$, et $\text{i}^4 = 1$.

Exercice 3
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(2+5\text{i}) + (-11+2\text{i})$
2. $(1-8\text{i}) - 3(2+\text{i})$
3. $5\text{i}(4+3\text{i})$
4. $(5-3\text{i}) \times (4+\text{i})$
5. $(2-7\text{i})^2$

Propriété
Pour tous nombres réels a et b, $(a+\text{i}b)(a-\text{i}b) = a^2 + b^2$.

Exercice 4
Montrer que pour tous nombres réels a et b, $(a+\text{i}b)(a-\text{i}b) = a^2 + b^2$.

Remarque (forme algébrique d'un quotient)
Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
Autrement dit, pour $z_2 \neq 0$, on part de l'égalité $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}}$.

Exercice 5
Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{1-3\text{i}}$ et $\dfrac{1+2\text{i}}{1+\text{i}}$.
On pourra vérifier les résultats à la calculatrice.

Exercice 6
Montrer que $\dfrac{1}{\text{i}} = -\text{i}$.

Propriété (égalité de deux nombres complexes)
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z = a + \text{i}b$ et $z' = a' + \text{i}b'$ avec a, b, a', b' réels, alors

$$z = z' \Leftrightarrow (\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Conséquence
Soit $z = a + \text{i}b$ avec a et b réels. Alors,

$$z = 0 \text{ si et seulement si } (\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1. $(2 + \text{i})z = 5$
2. $4 - 2\text{i}z = -3 + \text{i}$
3. $(1 + 3\text{i})z = 3 - 2\text{i}$

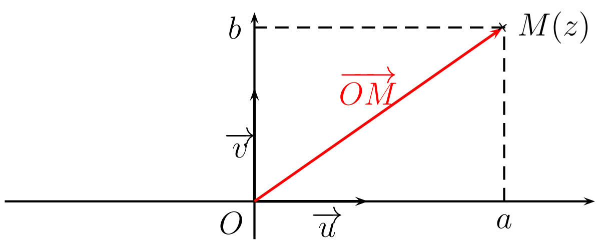
Propriété (opérations sur la conjuguaison)
Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{z + z'} = \ldots$
2. $\overline{z \times z'} = \ldots$
3. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \ldots$
   et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \ldots$

III Nombre complexe et géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
Soient a et b deux nombres réels.
À tout nombre complexe $z = a + \text{i}b$ on associe le point du plan $M(a; b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + \text{i}b$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M.
z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Remarque
Si M est l'image du nombre complexe $z = a + ib$, alors l'image de son conjugué $\overline{z'} = a - ib$ est le point M' symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = \dots$
2. Le vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}} = \dots$
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $\overrightarrow{kw}$ a pour affixe $z_{k\overrightarrow{w}} = \dots$
4. Le milieu I du segment $[AB]$, a pour affixe $z_I = \dots$

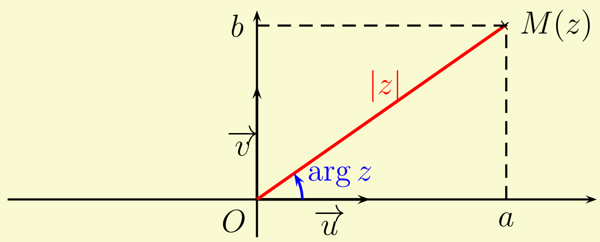
1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + \mathrm{i}(y_B - y_A) = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = z_B - z_A$.
2. On raisonne de même en passant aux coordonnées pour montrer les points 2., 3. et 4..

IV Module et argument d'un nombre complexe

Définition
Soient $z = a+ib$ avec a, b réels un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

1. Le module de z, noté $|z|$ est la distance OM, soit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Si z est non nul, un argument de z, noté $\arg z$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.

$$\text{Pour } z \neq 0,\ \arg z = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}), \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$



Remarque

1. Un module est toujours positif ou nul, et $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
2. Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments : si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$, alors les autres mesures de cet angle sont les réels $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Le nombre 0 n'a pas d'argument car l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini si $M = O$.

Propriété (distance entre deux points)
Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, $AB = \dots$

Remarque
L'ordre des points n'a pas d'importance : $AB = BA = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.

Exercice 8
Soient les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 2 + \mathrm{i}$, $z_F = 4 + 3\mathrm{i}$ et $z_G = 6 - \mathrm{i}$.
Étudier la nature du triangle EFG.

Propriété
Pour tous points distincts A et B, $(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

V Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition (et théorème)
Soit z un nombre complexe non nul. Posons $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.
Alors,

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Cette écriture est appelée une forme trigonométrique de z.
On note aussi $z = [r; \theta]$.

Remarque
Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques car $\theta = \arg z$ est défini à 2π près (par contre le module $r = |z|$ est unique).

Démonstration
Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
Notons M l'image de z, et N le point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ avec le cercle trigonométrique (de rayon 1).
On a $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$.
Par ailleurs, $\theta = (\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{ON})$.
Comme N est sur le cercle trigonométrique, ses coordonnées sont $(\cos\theta; \sin(\theta))$.
Donc les coordonnées de M sont $(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Donc, en revenant aux affixes, $z = a + \mathrm{i}b = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta$.
Finalement, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. □

Propriété
1. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont à la fois le même module, et le même argument à un multiple de 2π près.
2. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \quad [2\pi]$.

Propriété
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Alors,

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
- $r = \ldots$
- $\cos\theta = \ldots$
- $\sin\theta = \ldots$

Ceci permet de retrouver θ.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
- $a = \ldots$
- $b = \ldots$