Corrigé du Devoir maison n° 1

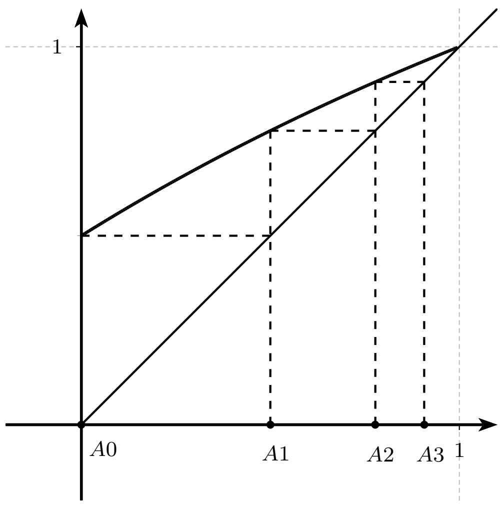
Partie A

1. f est dérivable sur $[0;1]$ et on a : $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - 1(3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$.
   Pour tout x de $[0;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

x	0	1
signe de $f'(x)$	$+$	
variation de f	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

2. Soit x un élément de I : $0 \leqslant x \leqslant 1$. f est croissante sur I, donc $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, donc $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$. Or $0 \leqslant \frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc $f(x) \in I$.
   On en déduit que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

3. 4.



5. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 1.

4. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$.

   Or $(1 - u_n)(u_n + 2) = u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n = -u_n^2 - u_n + 2$,

   donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.

   On admet que pour tout entier n, $u_n \in [0;1]$.
   On en déduit que, pour tout entier n, $1 - u_n > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$.
   Donc, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$.
   Donc,la suite (u_n) est strictement croissante.

Partie B

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\frac{3u_n+2}{u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4} + 2} = \dfrac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)} = \dfrac{2u_n - 2}{u_n + 10}$,

   donc $v_{n+1} = \dfrac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{2}{5}v_n$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

2. • $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{-1}{2}$

   • (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, donc, pour tout entier n, on a :
   $v_n = v_0 \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = \dfrac{-1}{2} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

3. Pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, donc $(u_n + 2)v_n = u_n - 1$, donc $u_n v_n + 2v_n = u_n - 1$,
   donc $u_n v_n - u_n = -2v_n - 1$, donc $u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$.

   Or d'après la question précédente, on constate que, pour tout entier n, $v_n < 0$, donc $v_n - 1 \neq 0$,

   donc, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$.
   Puis, en utilisant le résultat de la question B 2. :
   $u_n = \dfrac{-2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{\frac{-1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = \dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{\frac{-1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

4. On admet que (u_n) tend vers 1.

   Algorithme qui détermine et affiche le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} > 0,999\,99$:

   variable U est un réel, n est un entier
   entrée n prend la valeur 0
   U prend la valeur 0
   traitement
   Tant que $U \leqslant 0,999\,99$ **faire**
   n prend la valeur $n + 1$
   U prend la valeur $\dfrac{3U + 2}{U + 4}$
   Fin Tant que
   sortie afficher n

   En programmant l'algorithme sur la calculatrice, on trouve $n_0 = 14$.