

## Réponses de l'interrogation de mathématiques n° 3

### Sujet 1

#### Exercice 1 (questions de cours, 3 points)

- Donner la définition d'une suite arithmétique.  
Une suite est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre réel  $r$ .  
Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$ .
- Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_1$ .  
Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 $u_n = u_1 + (n - 1)r$ .
- Soit  $(V_n)$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = 4$  et de raison 13. Donner l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .  
Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = V_0 + n \times r = 4 + 13n$ .

#### Exercice 2 (8 points)

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique définie par son 1er terme  $U_0 = 3$  et la relation de récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = U_n + 14$ .

- Calculer  $U_1$ , puis  $U_2$ .  
 $U_1 = U_0 + 14 = 3 + 14 = 17$ .  
 $U_2 = U_1 + 14 = 17 + 14 = 31$ .
- Préciser la raison de la suite  $(U_n)$ .  
La suite  $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r = 14$ .
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
Pour tout entier  $n$ ,  $U_n = U_0 + nr = 3 + 14n$ .
- Calculer  $U_{25}$ .  
 $U_{25} = 3 + 14 \times 25 = 353$ .
- Quel est le sens de variation de  $(U_n)$ ? Justifier.  
Comme  $r = 14 > 0$ , la suite  $(U_n)$  est croissante.
- Calculer  $S_{25} = U_0 + U_1 + \dots + U_{25}$ . Justifier.  
 $S_{25} = \frac{(U_0 + U_{25}) \times (25 + 1)}{2} = \frac{(3 + 353) \times 26}{2} = 4628$ .

#### Exercice 3 (9 points)

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de tableur, donne l'évolution de 2010 à 2016 du nombre de naissances dans une commune rurale.  
Les lignes 4 et 5 sont au format pourcentage, arrondi à 0,01 % près.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	Rang de l'année ( $x_i$ )	0	1	2	3	4	5	6
3	Nombre de naissances ( $y_i$ )	231	220	212	201	191	185	181
4	Taux d'évolution entre 2 années consécutives (en %)	X						
5	Taux d'évolution depuis 2010 (en %)	X						

- Calculer le taux d'évolution du nombre de naissances entre les années 2010 et 2011. Donner le résultat en pourcentage, arrondi à 0,01 %.  
 $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{220 - 231}{231} \approx -0,0476$ .  
Le nombre de naissances a diminué de 4,76 % environ entre 2010 et 2011.
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C4 pour calculer ce taux d'évolution et pour obtenir les autres taux d'évolution annuels en recopiant la formule vers la droite ?  
=(C3-B3)/B3.
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C5 pour calculer ce taux d'évolution et pour obtenir les autres taux d'évolution annuels en recopiant la formule vers la droite ?  
=(C3-\$B3)/\$B3.
- Quel nombre est affiché dans la cellule F5? Justifier.  
 $t = \frac{191 - 231}{231} \approx -0,1732$ .  
Le nombre affiché est donc -17,32%.
- On considère qu'à partir de 2016 le nombre de naissances devrait diminuer de 4% par an. Le maire affirme que selon ce modèle il devrait y avoir moins de 150 naissances dès 2020. Son affirmation est-elle justifiée ?  
Diminuer de 4 % revient à multiplier par  $1 - 0,04 = 0,96$ .  
Au bout de 3 ans :  $181 * 0,96^3 \approx 160$ .  
Au bout de 4 ans :  $181 * 0,96^4 \approx 154$ .  
Selon ce modèle, il devrait y avoir 160 naissances en 2019 et 154 en 2020.  
L'affirmation est donc fausse.
- Bonus : Désormais, on suppose qu'à partir de 2016, les nombres de naissances chaque année sont les termes d'une suite arithmétique de raison  $-4$  (et de premier terme 181).  
Calculer le nombre total de naissances sur la période de 2016 à 2026

(en incluant les années 2016 et 2026).

Il y a 11 années à prendre en compte de 2016 à 2026.

On cherche donc la somme des 11 premiers termes de la suite arithmétique de 1er terme 181 et de raison  $-4$ .

Si l'on pose  $U_0 = 181$ , alors  $U_n = 181 - 4n$ , et le 11e terme est  $U_{10} = 181 - 4 \times 10 = 141$ .

$$S_{10} = U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = \frac{(U_0 + U_{10}) \times (10 + 1)}{2}.$$

$$S_{10} = \frac{(181 + 141) \times 11}{2} = 1771.$$

Sur les onze années de 2016 à 2026, il devrait y avoir 1771 naissances.

### Réponses du Sujet 2

#### Exercice 4 (questions de cours, 3 points)

- Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ .  
Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 $u_n = u_0 + nr$ .
- Soit  $(V_n)$  la suite arithmétique de 1er terme  $V_1 = 17$  et de raison 3.  
Donner l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .  
 $V_n = V_1 + (n - 1)r = 17 + (n - 1) \times 3$ .
- Énoncer la propriété relative au sens de variation d'une suite arithmétique.  
La suite est croissante si la raison est positive, et décroissante si la raison est négative.

#### Exercice 5 (8 points)

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique définie par son 1er terme  $U_1 = 653$  et la relation de récurrence pour tout  $n \geq 1$ ,  $U_{n+1} = U_n - 6$ .

- Calculer  $U_2$ , puis  $U_3$ .  
 $U_2 = U_1 - 6 = 653 - 6 = 647$ .  
 $U_3 = U_2 - 6 = 647 - 6 = 641$ .
- Préciser la raison de la suite  $(U_n)$ .  
La suite  $(U_n)$  est arithmétique de raison  $r = -6$ .
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
 $U_n = U_1 + (n - 1) \times r = 653 - 6 \times (n - 1)$ .
- Calculer  $U_{25}$ .  
 $U_{25} = 653 - 6 \times (25 - 4) = 653 - 6 \times 24 = 509$ .
- Quel est le sens de variation de  $(U_n)$ ? Justifier.  
Comme  $r = -6 < 0$ , la suite  $(U_n)$  est décroissante.
- Calculer  $S_{25} = U_1 + U_2 + \dots + U_{25}$ . Justifier.  
 $S_{25} = \frac{(U_1 + U_{25}) \times 25}{2} = \frac{(653 + 509) \times 25}{2} = 14525$ .

#### Exercice 6 (9 points)

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de tableur, donne l'évolution de 2010 à 2016 du nombre de naissances dans une commune rurale.

Les lignes 3 et 4 sont au format pourcentage, arrondi à 0,01 % près.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	Nombre de naissances	231	240	252	261	273	281	291
3	Taux d'évolution entre 2 années consécutives (en %)	X						
4	Taux d'évolution depuis 2010 (en %)	X						

- Calculer le taux d'évolution du nombre de naissances entre les années 2010 et 2011. Donner le résultat en pourcentage, arrondi à 0,01 %.  
 $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{240 - 231}{231} \approx 0,038961$ .  
De 2010 à 2011 le nombre de naissances a augmenté de 3,90% environ.
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C3 et recopier vers la droite?  
 $= (C2 - B2) / B2$
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C4 et recopier vers la droite?  
 $= (C2 - \$B2) / \$B2$
- Quel nombre est affiché dans la cellule H4? Justifier.  
 $t = \frac{291 - 231}{231} \approx 0,2597$ . On affiche 25,97%.
- On considère qu'à partir de 2016 le nombre de naissances devrait augmenter de 5% par an. Le maire affirme que selon ce modèle il devrait y avoir plus de 350 naissances dès 2020. Son affirmation est-elle justifiée?  
 $291 \times 1,05^4 \approx 354$ .  
Selon ce modèle, il devrait y avoir environ 354 naissances en 2020.  
L'affirmation est donc vraie.
- Bonus : Désormais, on suppose qu'à partir de 2016, les nombres de naissances chaque année sont les termes d'une suite arithmétique de raison 9 (et de premier terme 291).  
Calculer le nombre total de naissances sur la période de 2016 à 2026 (en incluant les années 2016 et 2026).  
Il y a 11 années de 2016 à 2026 en incluant 2016 et 2026.  
On pose  $u_0 = 291$ , et  $r = 9$ .  
On cherche d'abord  $u_{10} = u_0 + 10r = 291 + 90 = 381$ .  
Enfin,  $u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = \frac{(u_0 + u_{10}) \times 11}{2} = \frac{(291 + 381) \times 11}{2} = 3696$ .  
Il y aurait alors 3696 naissances sur la période 2016-2026.