CRSA2 – Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1

Une fabrique de desserts glacés produit des cônes à la vanille. On note X la variable aléatoire qui à chaque cône associe sa masse en grammes de glace qu'il contient. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type $2\sqrt{2}$.
À quel intervalle doit appartenir la masse si on veut qu'au plus 5 % des cônes aient une masse n'appartenant pas à cet intervalle ?
Notons X une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(100, 2\sqrt{2})$.
On cherche un intervalle I tel que $P(X \notin I) \leqslant 0,05$, ce qui revient à $P(X \in I) > 0,95$.
Avec la calculatrice, on obtient un intervalle $[a; b]$ vérifiant $P(X \in [a; b]) = 0,95$ où $a \approx 94,45638$ et $b \approx 105,5436$.
En arrondissant a par défaut et b par excès, on a bien $P(X \in [94,45; 105,55]) > 0,95$.
L'intervalle $[94,45; 105,55]$ convient.

Exercice 2 (Daltonisme, approximation d'une loi binomiale par une loi normale)

Le daltonisme, ou mauvaise vision des couleurs, est une anomalie dont 8 % des hommes sont atteints.
Soit X la variable qui, à tout échantillon de 500 hommes pris au hasard dans la population, associe le nombre de ces hommes atteints de daltonisme.

1. X suit une loi binomiale. Indiquer ses paramètres.
   On a $n = 500$, et $p = 0,08$.
2. Montrer que l'on peut approcher la loi de X par une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ que l'on précisera.
   On vérifie les 3 conditions pour approcher une loi binomiale par une loi normale :
   — $n > 30$ car $500 > 30$.
   — $np > 5$ car $500 \times 0,08 = 40 > 5$.
   — $n(1 - p) > 5$ car $500 \times (1 - 0,08) = 460 > 5$
   Donc on peut approcher X par la loi normale d'espérance $\mu = np = 40$, et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{500 \times 0,08 \times 0,92} = \sqrt{36,8} \approx 6,066$.
   La variable Y suivant $\mathcal{N}(40; 6,066)$ peut être utilisée pour approcher X.
3. On note Y une variable suivant cette loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$. En utilisant cette approximation, déterminer :
   (a) la probabilité que 39 hommes parmi les 500 soient atteints de daltonisme.
   On prend donc $\mu = 40$, et $\sigma \approx 6,066$.
   On tient compte de la correction de continuité pour les approximations.
   $P(X = 39) \approx P(38,5 < Y < 39,5) \approx 0,065$.
   (b) la probabilité qu'au plus 35 hommes parmi les 500 soient atteints de daltonisme.
   $P(X \leqslant 35) \approx P(Y \leqslant 35,5) \approx 0,229$.

   Pour information, directement sur la calculatrice avec la loi binomiale , on trouve $P(X = 39) \approx 0,065$, et $P(X \leqslant 35) \approx 0,232$.