1re STI. Correction du contrôle n^o 2.

Exercice 1 (10 points)

Un restaurant propose dans son menu trois formules :

— Formule A : entrée + plat

— Formule B : plat + dessert

— Formule C : entreée + plat + dessert

On note le choix des clients venus pour déjeuner à midi (ensemble noté M) ou pour dîner le soir (ensemble noté S). Les effectifs sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

	Formule A	Formule B	Formule C	Total
Déjeuner (M)	27	31	17	75
Dîner (S)	12	20	53	85
Total	39	51	70	160

1. Compléter les cases vides du tableau.
2. (a) Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant choisi la formule A parmi ceux qui sont venus déjeuner le midi.
   $f_M(A) = \dfrac{card(M \cap A)}{card(M)} = \dfrac{27}{75} = 0,36 = 36\%$.
   36% des clients qui ont déjeuné à midi ont pris la formule A.

   (b) Montrer que la fréquence en pourcentage de clients venus dîner le soir parmi ceux qui ont choisi la formule B est au dixième près égale aà 39,2 %.
   $f_B(S) = \dfrac{card(B \cap S)}{card(B)} = \dfrac{20}{51} \approx 0,392$.
   Environ 39,2% des clients prenant la formule B sont venus le soir.
3. Dresser le tableau des fréquences conditionnelles par lignes (arrondir à 10^{-4}), et interpréter le nombre 0,1412 obtenu dans une des cases.

	Freq A	Freq B	Freq C	Total
Freq Déjeuner M	0,36	0,4133	0,2267	1
Freq Dîner (S)	0,1412	0,2353	0,6235	1

   $f_S(A) \approx 0,1412$, cela signifie que 14,12% environ des clients qui sont venus le soir ont pris la formule A.

4. Calculer la fréquence en pourcentage des clients ayant déjeuné le midi dans ce restaurant.
   $f(M) = \dfrac{75}{160} = 0,46875$.
   46,875 % des clients sont venu à midi.
5. Le patron du restaurant déclare : « J'ai une carte des desserts très attractive car plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert ». A-t-il raison ? Justifier.
   Les formules avec dessert sont B et C.
   $f(B \cup C) = \dfrac{51 + 70}{160} = 0,75625 > 0,75$.
   Le patron dit vrai : plus des trois quarts des clients choisissent une formule avec dessert.

Exercice 2 (10 points)

Dans un club multisport de 400 adhérents, les sports pratiqués sont le tennis, le squash et le badminton. Les adhérents sont classés suivant leurs catégories : enfants, seniors et vétérans. On sait que :

— 15 % pratiquent le badminton, et parmi ceux-là, le tiers sont des enfants.

— 75 % pratiquent le tennis et, parmi eux, 32 % sont seniors.

— Parmi les adhérents pratiquant le squash, aucun n'est enfant et 20 sont des vétérans.

	Badminton	Tennis	Squash	Total
Enfant	20	130	0	150
Senior	30	96	20	146
Vétéran	10	74	20	104
Total	60	300	40	400

1. Compléter les effectifs du tableau.
2. Pour la suite les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
   On choisit un adhérent parmi les 400 adhérents du club.
   On considère les événements suivants :
   E : L'adhérent est un enfant S : L'adhérent est un senior
   V : L'adhérent est un vétéran T : L'adhérent joue au tennis
   D : L'adhérent joue au squash B : L'adhérent joue au badminton

   (a) Déterminer la probabilité des événements S et T.
   $P(S) = \dfrac{146}{400} = \dfrac{73}{200}$, et $P(T) = \dfrac{300}{400} = \dfrac{3}{4}$.

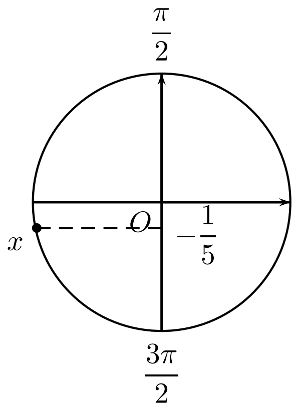
(b) Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement $S \cap T$ puis calculer sa probabilité.
$S \cap T$: "L'adhérent est sénior et joue au tennis".
$P(S \cap T) = \dfrac{96}{400} = \dfrac{6}{25}$.

(c) On choisit au hasard un adhérent parmi les joueurs de badminton.
Calculer la probabilité que ce soit un vétéran. Comment se note cette probabilité ?
$P_B(V) = \dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$.

(d) Calculer la probabilité conditionnelle de E sachant T, notée $P_T(E)$. Décrire par une phrase cette probabilité.
$P_T(E) = \dfrac{130}{300} = \dfrac{13}{30}$.
La probabilité que l'adhérent soit un enfant, sachant qu'il joue au tennis, est de $\dfrac{13}{30}$.

Exercice 3 (4 points)
Soit x le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = -\dfrac{1}{5}$.

1. Placer l'image de x.



2. À l'aide de la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$. Justifier.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$.
Ainsi, $\cos x = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\dfrac{24}{25}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.
Comme x appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$.
Finalement, $\boxed{\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}.}$

Exercice 4 (5 points)

1. Donner (sans justification) une valeur de x vérifiant :
   (a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{4} \text{ convient}}$
   (b) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{x = \dfrac{2\pi}{3} \text{ convient}}$
   (c) $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$ $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{2} \text{ convient}}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   Les solutions sont les réels $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$, et $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\sin x = \dfrac{1}{2}$
   Les solutions sont les réels $x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$, et $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :
   (a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right\}}$
   (b) $\sin x = \dfrac{3}{2}$
   Il n'y a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. ($S = \varnothing$)

Exercice 5 (1 point)
En utilisant les propriétés du cours, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x + \pi) - \sin(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$\cos(x + \pi) - \sin(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x - (-\sin x) + \cos x = \sin x$$