Chapitre 8 : Angles orientés. Trigonométrie

I Angles orientés de vecteurs

Dans tout ce chapitre, on considère des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, de sorte que l'angle de vecteurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ soit bien défini.

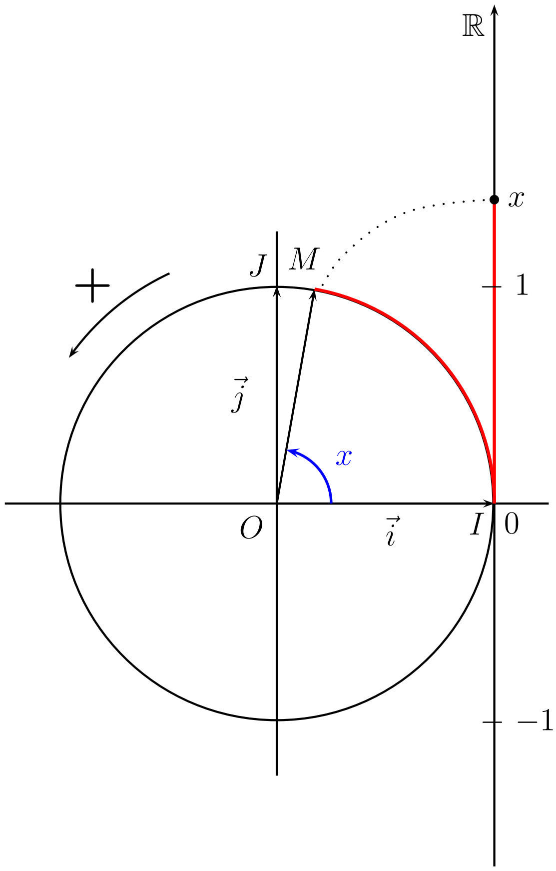
I.1 Rappels sur le cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$.
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I.
Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.
On dit que M est l'image de x sur le cercle, ou que x est une abscisse curviligne de M.

x est une mesure en radian de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i}\,; \overrightarrow{OM}\right)$.

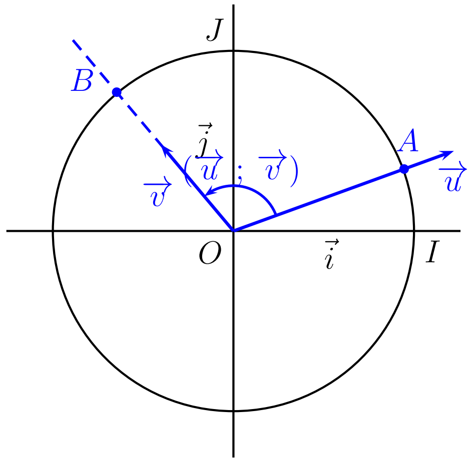
Intérêt de mesurer les angles en radians :
Lorsque $x \in [0; 2\pi[$, la mesure de l'angle $\left(\vec{i}\,; \overrightarrow{OM}\right)$ (en radians) est égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OM}$.



Remarque
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc ...
Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi ...
....
Les réels x et x' ont la même image ssi il existe ...
Notation et vocabulaire :
On dit alors que x est congru à x' modulo 2π et on note $x = x' \quad [2\pi]$.

I.2 Mesures des angles orientés

Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Notons A et B les points d'intersection du cercle trigonométrique avec les demi-droites $[O; \overrightarrow{u})$ et $[O; \overrightarrow{v})$.
On appelle mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ les nombres réels $b - a$ où :
a est une abscisse curviligne de A,
b est une abscisse curviligne de B.



Remarque (Cas particuliers)

- Angle nul : $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u}) = 0\ [2\pi]$.
- Angle plat : $(-\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u}) = \pi\ [2\pi]$.
- Angle droit : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Propriété
Si x est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$, alors toutes les mesures de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On écrit $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = x\ [2\pi]$.

Démonstration
On reprend les notations de la définition. Considérons deux mesures $b - a$ et $b' - a'$ de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$. Comme a et a' sont deux abscisses curvilignes du point A, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a' = a + 2n\pi$.
De même, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b' = b + 2m\pi$.
Alors, $b' - a' = b + 2m\pi - (a + 2n\pi) = b - a + 2(m - n)\pi$. $k = m - n \in \mathbb{Z}$.
Deux mesures de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ diffèrent d'un multiple de 2π. □

Définition (Mesure principale)
Parmi toutes les mesures de l'angle $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$, une seule appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure est la mesure principale de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.

Remarque (Lien avec les angles géométriques)
Si α est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$, alors $\widehat{AOB} = |\alpha|$. La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$ est la mesure (en radian) de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.
En effet, la mesure d'un angle géométrique est toujours dans $[0; \pi]$.

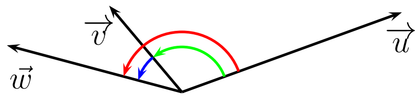
Remarque (orientation d'une figure, d'un repère)

1. On dit qu'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ est direct si $(\vec{i}\,; \vec{j}\,) = +\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
   Il est indirect si $(\vec{i}\,; \vec{j}\,) = +\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
2. Un triangle ABC est direct si l'on passe par les points A, B, C dans cet ordre en tournant dans le sens direct, ce qui revient à dire que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ a une mesure principale positive (entre 0 et π).

I.3 Propriétés des angles orientés

Théorème (Relation de Chasles)
Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ \vec{w}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{w})\ [2\pi]$$



Remarque
La relation de Chasles est fausse avec des angles géométriques, sauf si les trois angles sont saillants (inférieurs à un angle plat).
Attention si les deux angles qu'on additionnne mesurent plus de π (ensemble), la relation de Chasles est fausse.

Corollaire
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :

- $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$.
- $(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.
- $(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.
- Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls de même signe, $(k_1\vec{u}\ ; k_2\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$.

Démonstration

- D'après la relation de Chasles, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = 0\ [2\pi]$. D'o $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$.
- Toujours avec la relation de Chasles, $(-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (-\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$ et comme $(-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = \pi\ [2\pi]$, on a bien $(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.
- On montre de même que $(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$.
- On peut se ramener aux cas où k_1 et k_2 sont égaux à ± 1.
  Si $k_1 = k_2 = -1$, on obtient :
  $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v};\ -\vec{v})\ [2\pi]$
  $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi] = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$.
  Les autres cas sont évidents ou reprennent les points précédents dans la propriété.

La définition de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ permet de se ramener à des vecteurs unitaires. □

Remarque
Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0\ [2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \pi\ [2\pi].$$

On peut aussi le formuler de la façon suivante :
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi]$.

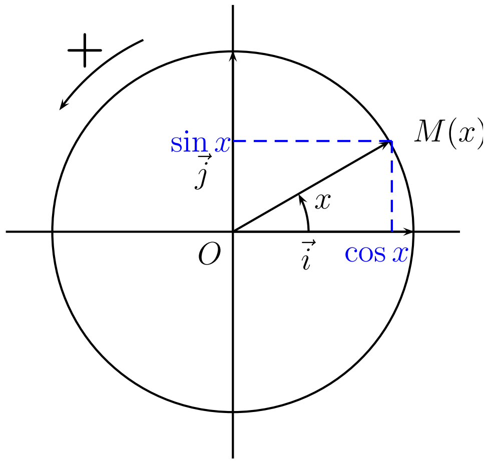
2. Le triangle ABC est rectangle en A ssi $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}\quad [\pi]$.

Exercice 1
Déterminer une mesure d'un angle en utilisant les propriétés précédentes : ressource 2654

II Trigonométrie

II.1 Cosinus et sinus d'un réel

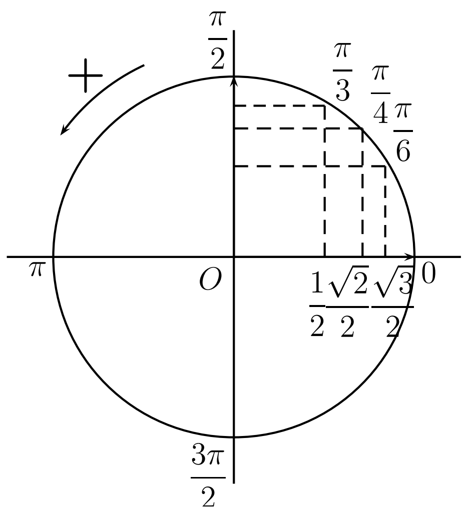
Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\sin x$.



Propriété (Conséquences immédiates)
Pour tout x réel, on a :
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

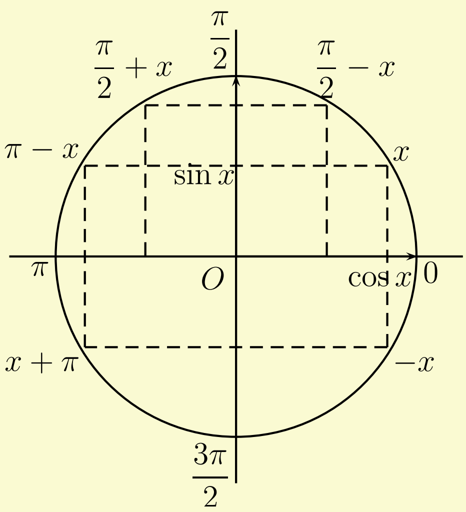


II.2 Angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) \\
\sin(-x) &= -\sin(x) \\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\
\cos(\pi-x) &= -\cos(x) \\
\sin(\pi-x) &= \sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos(x)
\end{aligned}$$



Exercice 2

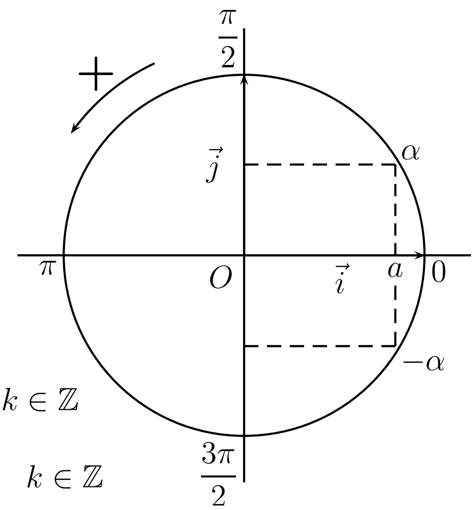
1. cos et sin, angles associés
   ressource 35
   ressource 19
   ressource 1126
2. mesure principale :
   ressource 251
   ressource 568
   ressource 567

II.3 Équations $\cos(x) = a$, $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

II.3.a Équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— Si $a < -1$ ou si $a > 1$, on remarque que l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

— Sinon, $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
$\cos(x) = a \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :

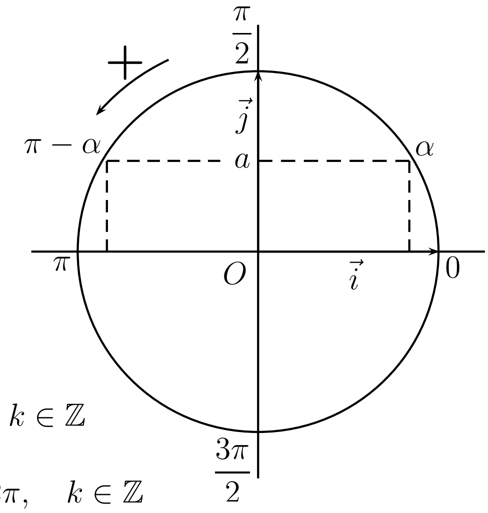


$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = -\alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

II.3.b Équation $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— De même que précédemment, si $a < -1$ ou si $a > 1$ l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

— Sinon, $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha) = a$.
$\sin(x) = a \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :



$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou & \\ x = \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$