Interrogation de mathématiques n° 2

Correction du sujet 1

Exercice 1 (2 points)

Démontrer le résultat suivant :

« Si f est une fonction croissante sur un intervalle I et si k est un réel strictement négatif, alors la fonction (kf) est décroissante sur I. »

Soient a et b deux réels de l'intervalle I, tels que $a < b$.

Comme f est croissante sur I, $f(a) \leqslant f(b)$.

En multipliant membre à membre cette inégalité par $k < 0$, il vient $k \times f(a) \geqslant k \times f(b)$.

Donc, pour tous a, b de I, si $a < b$, alors $(kf)(a) \geqslant (kf)(b)$.

La fonction (kf) est décroissante sur I.

Exercice 2 (3 points)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction u.

x	-5		-1		2		4
$u(x)$	1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

1. Soient a et b des réels tels que $0 < a < b < 1$. Comparer $u(a)$ et $u(b)$. Justifier.
   D'après les données, u est décroissante sur $]0;1[$.
   Pour 2 nombres a et b de l'intervalle $]0;1[$ avec $a < b$ on a donc $u(a) \geqslant u(b)$.
2. On pose $f(x) = \dfrac{1}{u(x)+4}$.
   (a) Justifier que f est bien définie sur $[-5;4]$.
   $f(x)$ existe ssi $u(x)+4 \neq 0$.
   Ajouter une constante ne change pas le sens de variation d'une fonction.
   La fonction $u+4$ a donc les mêmes variations que u.
   Le minimum de la fonction u est -3, donc le minimum de la fonction $x \mapsto u(x)+4$ est 1.
   Donc la fonction $x \mapsto u(x)+4$ ne s'annule pas, f est bien définie sur $[-5;4]$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-5;4]$. On ne demande pas de justifier.

x	-5		-1		2		4
$f(x)$	$1/5$	$\searrow$	$1/12$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1/4$

Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x} + 3x^2$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]-\infty;0]$.
   $1 - x \geqslant 0$ ssi $x \leqslant 1$.
   Donc pour tout $x \in]-\infty;0]$, $1-x \geqslant 0$, et donc f est bien définie sur $]-\infty;0]$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty;0]$.
   $x \mapsto 1-x$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ (fonction affine de coefficient directeur $-1 < 0$).
   Donc $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est aussi décroissante sur $]-\infty;0]$.
   La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, et en multipliant par $3 > 0$, il est de même pour $x \mapsto 3x^2$.
   Par somme de 2 fonctions décroissantes, f est décroissante sur $]-\infty;0]$.

Exercice 4 (2+1 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}|x-3| - \dfrac{1}{2}|1-x|$.

1. En distinguant des cas, exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
   $x - 3 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 3$ et $1 - x \geqslant 0$ ssi $x \leqslant 1$.

   — Si $x \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x-3| - \frac{1}{2}|1-x| \\ &= \frac{3}{2}(x-3) - \frac{1}{2}(x-1) \\ &= x - 4 \end{aligned}$$

— Si $1 \leqslant x < 3$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x-3| - \frac{1}{2}|1-x| \\ &= \frac{3}{2}(3-x) - \frac{1}{2}(x-1) \\ &= -2x+5 \end{aligned}$$

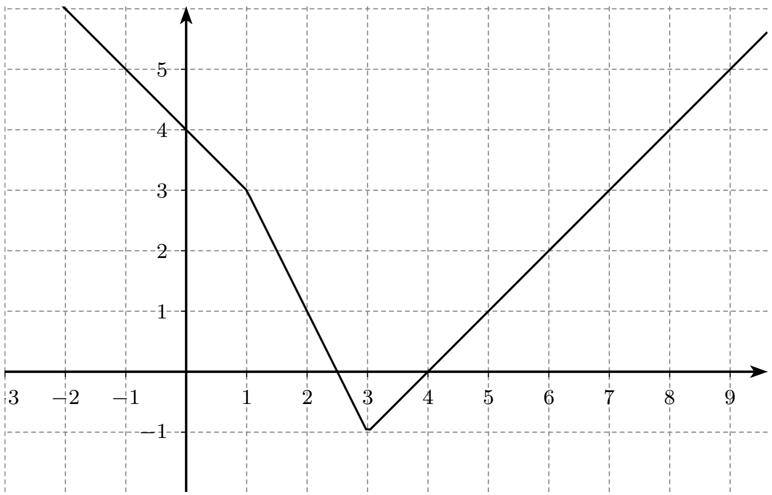
— Si $x \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x-3| - \frac{1}{2}|1-x| \\ &= \frac{3}{2}(3-x) - \frac{1}{2}(1-x) \\ &= -x+4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \\ -2x+5 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ -x+4 & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}}$$

2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
f est affine par morceaux, il suffit de déterminer 2 points pour chacun des 3 intervalles.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	4	3	1	-1	0



Interrogation de mathématiques n° 2
Correction du Sujet 2

Exercice 5 (2 points)
Démontrer le résultat suivant :
« Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et si k est un réel strictement positif, alors la fonction (kf) est décroissante sur I. »
Soient a et b deux réels de l'intervalle I, tels que $a < b$.
Comme f est décroissante sur I, $f(a) \geqslant f(b)$.
En multipliant membre à membre cette inégalité par $k > 0$, il vient $k \times f(a) \geqslant k \times f(b)$.
Donc, pour tous a, b de I, si $a < b$, alors $(kf)(a) \geqslant (kf)(b)$.
La fonction (kf) est décroissante sur I.

Exercice 6 (3 points)
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction u.

x	-5		-1		2		4
$u(x)$	1	$\nearrow$	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

1. Soient a et b des réels tels que $3 < a < b < 4$. Comparer $u(a)$ et $u(b)$. Justifier.
$\boxed{\text{$u$ est croissante sur $[3;4]$ donc pour tous réels a et b de cet intervalle avec $a<b$, on a $u(a) \leqslant u(b)$.}}$

2. On pose $f(x) = -5\sqrt{u(x)+4}$.
   (a) Justifier que f est bien définie sur $[-5;4]$.
   Pour tout $x \in [-5;4]$, $u(x) \geqslant -3$, donc $u(x)+4 \geqslant 1$.
   A fortiori, pour tout $x \in [-5;4]$, $u(x)+4 \geqslant 0$ et $\sqrt{u(x)+4}$ est bien défini.
   $\boxed{\text{Donc f est bien définie sur $[-5;4]$.}}$
   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $[-5;4]$. On ne demande pas de justifier.

x	-5		-1		2		4
$f(x)$	$-5\sqrt{5}$	$\searrow$	$-10\sqrt{3}$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	-10

Exercice 7 (3 points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2}{x+4} + 3x^2$.

1. Justifier que f est bien définie sur $[0;+\infty[$.
   $x+4=0$ ssi $x=-4$. Donc $x+4$ ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. f est bien définie.
2. Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
   Sur $[0;+\infty[$, $x \mapsto x+4$ est croissante, donc $x \mapsto \dfrac{1}{x+4}$ est décroissante.
   En multipliant par $(-2) < 0$, $x \mapsto \dfrac{-2}{x+4}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
   La fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, et en multipliant par $3 > 00$, $x \mapsto 3x^2$ est aussi croissante sur $[0;+\infty[$.
   Par somme de 2 fonctions croissantes, f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 8 (2+1 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{2}|x+3| + \dfrac{1}{2}|x-2|$.

1. En distinguant des cas, exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
   $x+3 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -3$ et $x+2 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$.
   — Si $x \geqslant 2$,
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x+3| + \frac{1}{2}|x-2| \\ &= \frac{3}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(x-2) \\ &= 2x+3,5 \end{aligned}$$
   — Si $-3 \leqslant x < 2$,
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x+3| + \frac{1}{2}|x-2| \\ &= \frac{3}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(2-x) \\ &= x+5,5 \end{aligned}$$
   — Si $x \leqslant -3$,
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}|x+3| + \frac{1}{2}|x-2| \\ &= \frac{3}{2}(-x-3) + \frac{1}{2}(2-x) \\ &= -2x-3,5 \end{aligned}$$
   Ainsi, $f(x) = \begin{cases} 2x+3,5 & \text{si } x \geqslant 2 \\ x+5,5 & \text{si } -3 \leqslant x < 2 \\ -2x-3,5 & \text{si } x < -3. \end{cases}$
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
   f est une fonction affine par morceaux.

x	-5	-4	-3	0	2	3
$f(x)$	6,5	4,5	2,5	5,5	7,5	9,5