Chapitre 12 : Probabilités

I Vocabulaire des probabilités

Définition
Une **expérience aléatoire** est une expérience qui peut produire des résultats différents si on la répète dans les mêmes conditions.
Un résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
L'ensemble des issues possibles est appelé **l'univers** et se note Ω (Omega).

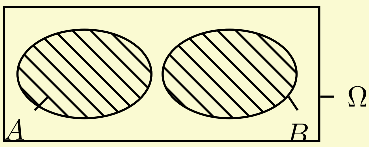
Exemple : on lancer un dé cubique et on note le résultat obtenu (sur la face du dessus).
L'une des issues est 6.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Définition
Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
Lorqu'il ne contient qu'une seule issue, il est appelé **événement élémentaire**.

Exemple : toujours avec le lancé d'un dé cubique.
Considérons l'événement A : "On obtient un nombre pair".
$A = \{2; 4; 6\}$
L'événement B : "le dé donne 1" est un événement élémentaire. Il ne contient qu'une seule issue.
$B = \{1\}$.

Remarque
Lorsqu'un événement ne contient aucune issue de Ω, c'est l'ensemble vide, noté $\varnothing$. Il est appelé événement impossible.
Lorsqu'il contient toutes les issues de Ω, c'est Ω. Il est appelé événement certain.

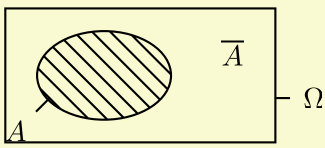
Définition
Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \varnothing$ (leur intersection est vide).



Exemple : Notons C : "le résultat est un 1",
et D : "le résultat est supérieur ou égal à 4".
Alors, C et D sont incompatibles.

Remarque
Deux événements élémentaires sont toujours incompatibles (disjoints).

Définition
Dans une expérience aléatoire d'univers Ω, l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ (lire "A barre") est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

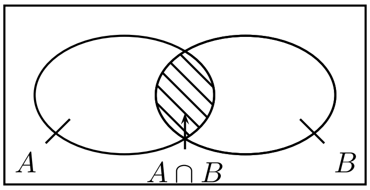


$\overline{A}$ est la partie non hachurée.

Exemple : Lancer d'un dé cubique.
Considérons A : "obtenir un nombre pair". $A = \{2; 4; 6\}$.
L'événement contraire de A est "obtenir un nombre qui n'est pas pair", ou encore ici "obtenir un nombre impair" : $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

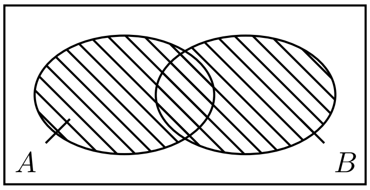
Remarque
A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Rappels :
L'**intersection** de deux ensembles est l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles.



$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \in B)$$

La **réunion** de deux ensembles est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles.



$A \cup B$ est la partie hachurée.

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

II Probabilités

II.1 Définition et propriétés

Définition (Probabilité)
Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un univers fini lié à une expérience aléatoire.
Cette notation signifie que l'univers est composé de n issues notés e_1,..., e_n.
On définit une loi de probabilité sur Ω lorsqu'à chaque issue e_i on associe un nombre positif ou nul p_i, et que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

On dit que p_i est la probabilité de e_i et on note naturellement $p_i = p(e_i)$.
Alors, la probabilité d'un événement A quelconque est la somme des probabilités des issues qui le composent.

Remarque
On a toujours $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

Exercice 1
On donne ci-dessous la loi de probabilité associée au lancer d'un dé cubique.

issues e_i	1	2	3	4	5	6
probabilités p_i	0.1	0.15	0.2	0.15	0.3	0.1

1. Vérifier que ce tableau correspond à la définition d'une loi de probabilité.

2. On note A : Obtenir un nombre pair.
   (a) Écrire A en listant toutes les issues qui le réalisent.
   (b) Calculer $P(A)$.
3. Déteminer la probabilité de l'événement B : "on obtient un résultat supérieur ou égal à 4".

Théorème (propriétés des probabilités, admis)
Soient A et B des événements d'un univers Ω.

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
3. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
4. $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$.
5. Pour tous événements A et B on a :
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Remarque
Comme $P(\Omega) = 1$, et $P(\varnothing) = 0$, Ω est appelé l'événement certain, et $\varnothing$ l'événement impossible.

Exercice 2
On reprend les données de l'exercice précédent.

issues e_i	1	2	3	4	5	6
probabilités p_i	0.1	0.15	0.2	0.15	0.3	0.1

On note A : "on obtient un nombre pair".
On note B : "on obtient un résultat supérieur ou égal à 4".

1. Décrire $\overline{A}$ et déterminer sa probabilité.
2. Décrire $A \cap B$ et déterminer sa probabilité.
3. Décrire $A \cup B$ et déterminer sa probabilité.

Exercice 3
Dans un univers Ω, on donne deux événements incompatibles A et B tels que $P(A) = 0.2$ et $P(B) = 0.7$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$ et $P(\overline{B})$.

III Équiprobabilité

Définition (Équiprobabilité)
On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple

1. On lance un pièce de monnaie non faussée. L'univers est constitué de 2 événements élémentaires : Pile et Face.
   Il y a équiprobabilité : $P(Pile) = P(Face) = \dfrac{1}{2}$.
2. Si on lance un dé non pipé, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Remarque
S'il y a équiprobabilité sur un univers qui a n issues, la probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
En effet, en notant e_1, e_2, ..., e_n les issues,
on a $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$.

$$\begin{aligned} P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) &= 1 \\ n \times P(e_1) &= 1 \\ P(e_1) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Tous les événements élémentaires ayant la même probabilité, cette probabilité est $\frac{1}{n}$.

Théorème (Équiprobabilité)
Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire.
S'il y a équiprobabilité, alors la probabilité de tout événement A est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nb d'éléments de } A}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$$

Exercice 4
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Chaque carte a la même probabilité d'être choisie.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : "la carte est un As".
   (b) B : "la carte est un Cœur"
2. Décrire par une phrase $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire par une phrase $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

IV Lien entre statistiques et probabilités

Théorème (admis)
Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, les fréquences d'un résultat ont tendance de plus en plus proches de la probabilité de ce résultat.

Exemple : Si l'on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition du 2 deviennent proches de $P(2) = \frac{1}{6}$.

V Arbres de probabilités

On utilise un arbre de probabilités pour représenter une expérience qui se déroule en plusieurs étapes.

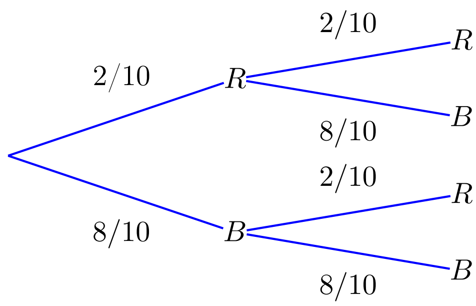
Méthode :

- Un niveau de l'arbre représente une étape de l'expérience.
- On place les événements aux bouts des branches et les probabilités sur les branches.
- À chaque niveau de l'arbre, la somme des probabilités sur les branches qui se rejoignent à un même nœud fait 1.
- La probabilité d'une issue est le produit des probabilités sur le chemin correspondant à cette issue.

Exercice 5 (corrigé)

Une urne contient 2 boules rouges (R) et 8 boules blanches (B).
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.

1. Représenter l'expérience par un arbre de probabilités.



2. Décrire l'univers Ω sous forme d'ensemble.
   L'univers est $\Omega = \{(R;R);(R;B);(B;R);(B;B)\}$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E : "on obtient deux boules rouges".
   Il n'y a qu'une issue qui réalise E.
   $E = \{(R;R)\}$.
   $P(E) = P(R;R) = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{4}{100} = 0,04$.
   (b) F : "on obtient deux boules de couleurs différentes".
   Il y a deux issues qui réalisent F.
   $F = \{(R;B);(B;R)\}$.
   $P(F) = P(R;B) + P(B;R) = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{10} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{16}{100} + \dfrac{16}{100} = 0,32$

Exercice 6

Reprendre l'exercice précédent avec une urne composée de 5 boules rouges (R) et une boule blanche (B), et où l'expérience consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Remarque (utilisation d'un arbre pour dénombrer)

On peut parfois utiliser un arbre pour dénombrer, ou dresser une liste complète des cas possibles dans certaines situations.
Dans certains cas, on peut se limiter à un arbre schématique, sans le représenter en entier.

Exercice 7 (utilisation d'un arbre pour dénombrer)

1. Combien de séquences de digicode à 4 chiffres (parmi 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) existe-t-il ?
2. Combien de séquences ayant des chiffres tous différents ?