Devoir maison n^o 7
A rendre pour le samedi 16/12/2017

Exercice 1
Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 2
On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |     | alors a prend la valeur 1 − a
                  |     | sinon Si d ⩽ 4
                  |     |         — alors b prend la valeur 1 − b
                  |     |       FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2e passage boucle Pour					
3e passage boucle Pour					

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

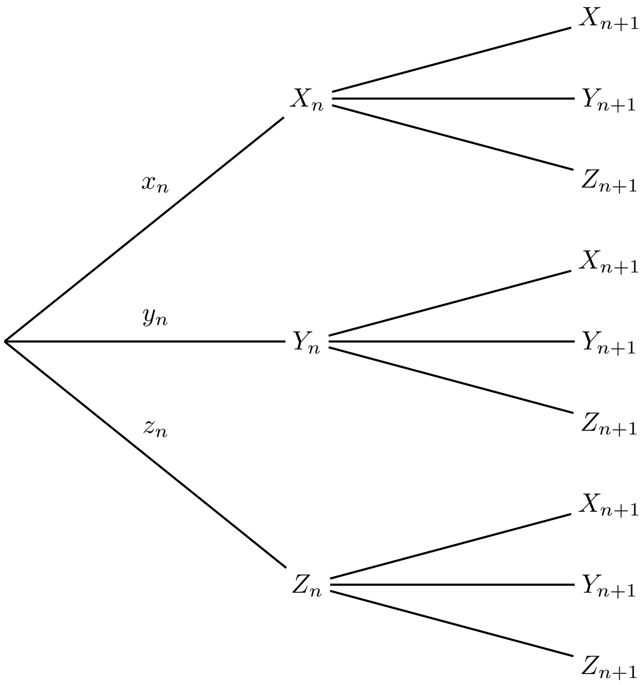
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   - X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
   - Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
   - Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

   De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

   (a) Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

   (b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

   (c) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



   (d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

   (f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

   Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   (g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

   Interpréter le résultat.