Correction du Bac blanc de mathématiques
Série ST2S

Exercice 1 (4 points)

L'extrait de feuille de calcul ci-dessous donne partiellement le nombre de SMS* interpersonnels émis par téléphone en France lors des années 2001 à 2007.

(*) Un SMS ou Short Message Service est un message texte, également appelé texto, envoyé d'un téléphone à un autre.

Dans les lignes 3 et 4, les cellules de la plage C3 : H4 sont au format pourcentage avec 1 décimale.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2	Nombre de SMS interpersonnels (en millions)	3 234	5 877	8 410		12 712	15 023	19 546
3	Taux d'évolution annuel	x	81,7%	43,1%	28,8%	17,3%		30,1%
4	Taux d'évolution depuis 2001	x						

Source ARCEP Volumes de la messagerie interpersonnelle

1. Calculer le nombre de millions de SMS interpersonnels émis au cours de l'année 2004 (arrondir à l'unité).
   $8410 \times 1,288 \approx 10832$.
   En 2004, il a eu environ 10832 millions de SMS envoyés.
2. Calculer le taux d'évolution du nombre de SMS de 2005 à 2006. Arrondir à 0,1%.
   $\dfrac{15023-12712}{12712} \approx 0,182$.
   De 2005 à 2006, le nombre de SMS a augmenté de 18,2 % environ.
3. Donner une formule qui, entrée dans la cellule C3, permet par recopie vers la droite d'obtenir la plage de cellules C3 : H3.
   On entre `=(C2-B2)/B2`.
4. En supposant qu'à partir de 2007 le nombre de SMS a augmenté de 25 % chaque année, déterminer le nombre de SMS envoyés en 2010 (au million près).
   Comme il y a 3 années de 2007 à 2010, cela revient à multiplier 3 fois par le coefficient d'une hausse de 30% en partant de la valeur de 2007.
   $19546 \times 1,3^3 \approx 42943$.
   D'après cette hypothèse, il y a eu 42 943 millions de SMS en 2010.
5. Donner une formule qui, entrée en C4, permette par recopie vers la droite d'obtenir la plage C4 : H4.
   On entre `=(C2-$B2)/$B2`.
6. Calculer la valeur qui serait alors affichée en H4.
   $t = \dfrac{19546-3234}{3234} \approx 5,044$.
   Entre 2001 et 2007, le nombre de SMS en France a augmenté de 504,4 %.

Exercice 2 (5 points)

Un test de dépistage d'une maladie a été élaboré par une entreprise pharmaceutique. Pour étudier sa fiabilité, on soumet à ce test une population comportant des personnes malades et des personnes saines.

On sait que dans la population testée :

— la proportion de personnes malades est de 85 % ;

— parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif ;

— parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif.

On choisit au hasard une personne dans la population testée ; on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

On note :

— M l'évènement : « la personne est malade » ;

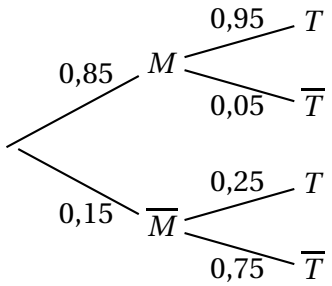
— T l'évènement : « le test est positif ».

Dans cet exercice, la probabilité d'un évènement E est notée $P(E)$; la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé est notée $P_F(E)$; l'évènement contraire d'un évènement E est noté $\overline{E}$.

1. Interpréter les données de l'énoncé pour déterminer les probabilités $p(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right)$.

   $P(M) = 0{,}85$ car la proportion de personnes malades est de 85 %.
   $P_M(T) = 0{,}95$ car parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif.
   $P_{\overline{M}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}75$ car parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif.

2. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.



3. (a) Exprimer par une phrase l'évènement $M \cap T$.

   $M \cap T$ est l'évènement : « la personne est malade et a un test positif ».

   (b) Calculer la probabilité $P(M \cap T)$. En donner la valeur exacte.

   $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}85 \times 0{,}95 = 0{,}807\,5.$

4. Montrer que $P(T) = 0{,}845$.

   $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right)$

   $P(T) = p(M) \times P_M(T) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T)$

   $P(T) = 0{,}807\,5 + 0{,}15 \times 0{,}25 = 0{,}807\,5 + 0{,}037\,5 = 0{,}845.$

   La probabilité d'avoir un test positif est 0,845.

5. On considère que le test de dépistage est fiable lorsque la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est supérieure ou égale à 0,95.

   Le test est-il fiable ?

   La probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est notée $P_T(M)$.

   $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}807\,5}{0{,}845} \approx 0{,}955\,6 > 0{,}95.$

   Le test est donc considéré fiable.

Exercice 3 (5 points)
Questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 1 point.
L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'enlève pas de points.

Une personne fume actuellement 140 cigarettes par mois. Pour arrêter de fumer, elle décide de diminuer de 5 cigarettes par mois.
On pose $u_0 = 140$, et pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de cigarettes qu'elle fumera dans n mois.

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison :
   a. $\boxed{-5}$ **b.** 5 **c.** 140
2. L'expression de u_n en fonction de n est donnée par :
   a. $u_n = 140 + 5n$ **b.** $\boxed{u_n = 140 - 5n}$ **c.** $u_n = 140 - 5(n-1)$
   Justification : $u_n = u_0 + nr = 140 - 5n$.
3. u_{25} est égal à :
   a. 265 **b.** $\boxed{15}$ **c.** 20
   Justification : $u_{25} = 140 - 25 \times 5 = 15$.
4. Dans 2 ans et 4 mois, la personne fumera :
   a. $\boxed{0 \text{ cigarette}}$ **b.** 5 cigarettes **c.** 10 cigarettes
   Justification : 2 ans et 4 mois correspond à $n = 2 \times 12 + 4 = 28$.
   $u_{28} = 140 - 28 \times 5 = 0$.
5. Le nombre de cigarettes qu'elle aura fumé sur les 26 premiers mois est de :
   a. 2020 **b.** 2025 **c.** $\boxed{2015}$
   Justification : la sommes des 26 premiers termes est $S_{25} = u_0 + \cdots + u_{25}$.
   $S_{25} = \dfrac{(u_0 + u_{25}) \times 26}{2} = \dfrac{(140 + 15) \times 26}{2} = 2015$.

Formulaire
La somme S_n des $n+1$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) est donnée par :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}.$$

Exercice 4
Pendant une épidémie observée sur une période de 36 jours, un institut de veille sanitaire a modélisé le nombre de personnes malades. La durée, écoulée à partir du début de la période et exprimée en jours, est notée t. Le nombre de cas en fonction de la durée t est donné en centaines, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;36]$. La représentation graphique de f est donnée en annexe.

Partie A : Lecture graphique

Le document annexe, sur lequel le candidat fera figurer des traits de construction est à remettre avec la copie.

1. (a) Quel est le nombre de malades au début du jour 6 ?
   On lit $f(6) = 1\,800$.
   Le nombre de malades est exprimé en centaines.
   $\boxed{\text{Au début du jour 6, il y a 180 000 malades.}}$

   (b) Quel est le nombre maximum de malades sur la période étudiée ? Quel jour cela se produit-il ?
   $\boxed{\text{Il y a environ 230 000 malades au maximum, ce maximum est atteint au jour 12.}}$

(c) Pendant combien de jours entiers le nombre de malades est-il resté supérieur à 110 000 ?
On lit $f(x) \geqslant 1\,100$ pour $x \in [3;24,4]$ (en lisant des valeurs approchées).

Le nombre de malades a été supérieur à 110 000 durant environ 21 jours.

Partie B : Étude de fonction

Dans cette partie, on admet que la fonction f est définie sur $[0;36]$ par :

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 24t^2 + 432t$$

1. Retrouver par le calcul les résultats de la questions 1.a).
$f(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 24 \times 6^2 + 432 \times 6 = 1\,800$.
On retrouve bien un nombre de 1 800 malades au jour 6.

2.(a) Déterminer l'expression de la dérivée de f.

$f'(t) = \frac{1}{3} \times 3t^2 - 24 \times 2t + 432 \times 1 = t^2 - 48t + 432.$

(b) Vérifier que $f'(t) = (t-12)(t-36)$.
En développant, $(t-12)(t-36) = t^2 - 36t - 12t + 12 \times 36 = t^2 - 48t + 432 = f'(t)$.
Donc $f'(t) = (t-12)(t-36)$.

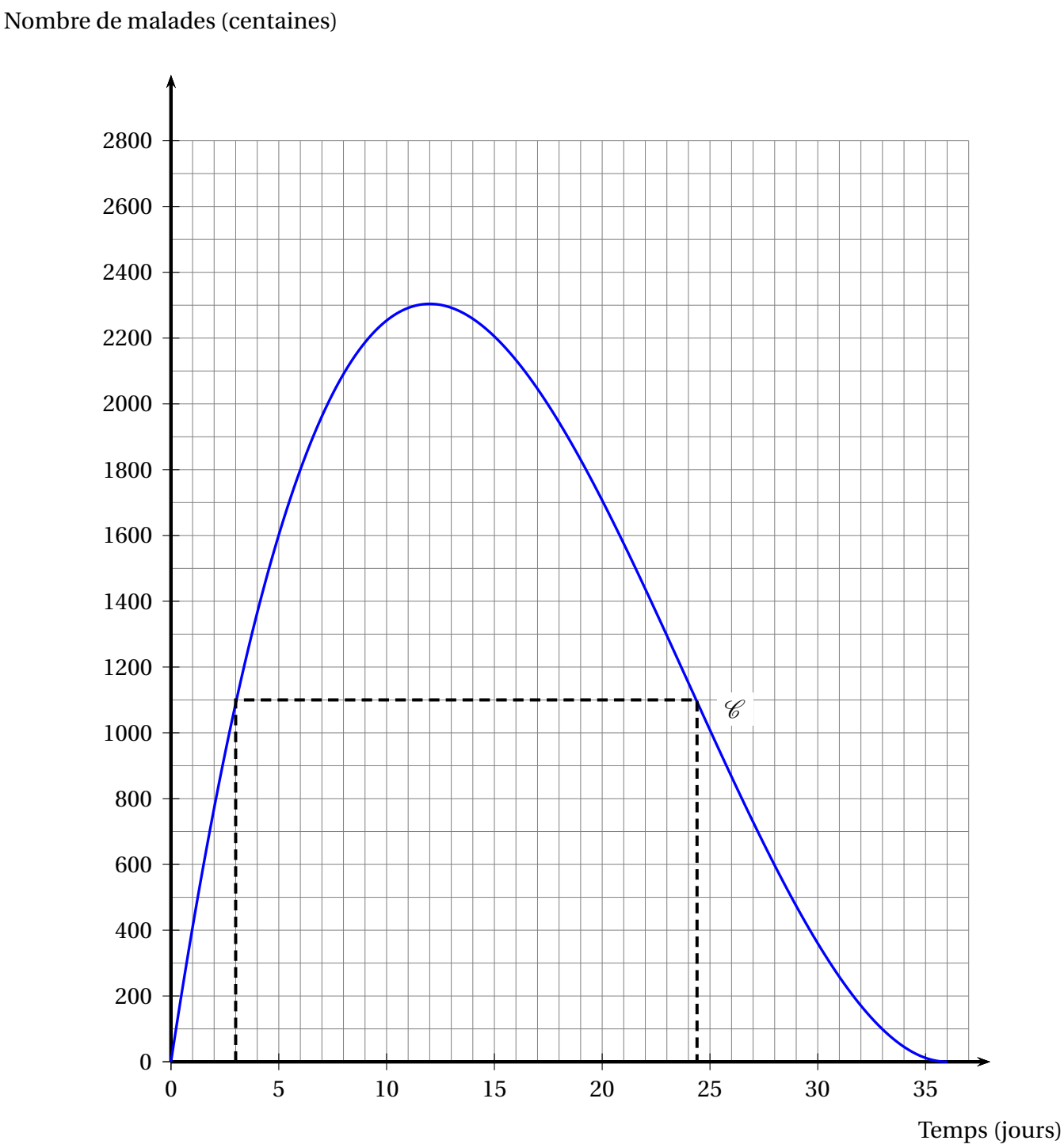
(c) Déterminer le tableau de signe de f' sur $[0;36]$.
$t - 12 = 0$ si et seulement si $t = 12$.
$t - 36 = 0$ si et seulement si $t = 36$.

t	0		12		36
$t-12$		$-$	0	$+$	
$t-36$		$-$		$-$	0
$f'(t) = (t-12)(t-36)$		$+$	0	$-$	0

(d) En déduire les variations de f sur $[0;36]$. En déduire le nombre maximal de malades.
$f(0) = \frac{1}{3} \times 0^3 - 24 \times 0^2 + 432 \times 0 = 0$.
De même ou bien à l'aide de la calculatrice, on obtient $f(12) = 2\,304$ et $f(36) = 0$.

t	0		12		36
$f'(t) = (t-12)(t-36)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	0	↗	2 304	↘	0

Le nombre maximal de malades est de 230 400. Il est obtenu le jour 12.


Nombre de malades (centaines)
2800
2600
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
5
10
15
20
25
30
35
$\mathscr{C}$
Temps (jours)