Chapitre 4 : Dérivation (2e partie)

I Rappels sur la dérivation

I.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.

Soit $h \neq 0$. Taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.	$T(h) =$
Nombre dérivé de f en a :	$f'(a) =$
Soit f dérivable en a. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite ...	passant par le point et de coefficient directeur
Équation de la tangente au point d'abscisse a	

I.2 Fonction dérivée

Soient a, b, c, d quatre nombres réels.

Expression de la fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}$	Expression de la dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = a$ (fonction constante)	$f'(x) =$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) =$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) =$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) =$

Exercice 1
Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + x - 13$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 2x + 1$.

II Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' =$
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' =$$
   — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' =$$

Démonstration (dérivée d'un produit de deux fonctions)
On suppose que u et v sont dérivables sur I.
On va montrer que $(u \times v)' = u'v + uv'$.
Soient $a \in I$, et $h \neq 0$.
$\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$
$\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$.
On admet le résultat suivant : toute fonction dérivable en a est continue en a.
On a alors $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi,
$$\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$
Donc $(u \times v)$ est dérivable sur I, et $(u \times v)' = u'v + uv'$. □

Exercice 2
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 8x^3 - 5x^2$
2. $f(x) = x^2(-2x+3)$, de deux façons différentes
3. $f(x) = \dfrac{1}{6x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$

III Fonction dérivée de fonctions de référence

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x^5$.

1. Rappeler la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions $(u \times v)$.
   $(u \times v)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. On pose $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2$, puis $f(x) = u(x) \times v(x)$.
   (a) On a alors $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Comme $u(x) = x^3$, on a $u'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   Comme $v(x) = x^2$, on a $v'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   (b) D'après la propriété rappelée à la question 1,
   $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème

1. Fonction puissance.
   Pour tout entier naturel non nul, la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$
2. Fonction inverse.
   La fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$,
   $$f'(x) =$$
3. Fonctions sinus et cosinus
   Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin'(x) =$$
   $$\cos'(x) =$$

Exercice 4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^7 - 5x^4 + \dfrac{1}{2}x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$
3. $f(x) = 11\sin x - 2\cos x + 8x^5$
4. $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{9}$

IV Fonctions composées et dérivation

Exercice 5 (composée de fonctions $g(ax + b)$)

1. Dans chaque cas, donner l'expression de la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$.
   (a) $a = 4$, $b = 7$, et $g(x) = x^3$.
   (b) $a = -3$, $b = 2$, et $g(x) = \dfrac{1}{x}$
   (c) $a = 2$, $b = -1$, et $g(x) = 7\cos x$.
2. Inversement, reconnaître l'expression $f(x)$ comme $g(ax+b)$ en précisant la fonction g et les réels a et b.

(a) $f(x) = (-8x+1)^4$

(b) $f(x) = \sin(2x-11)$

(c) $f(x) = (-4x+5)^2$

(d) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{5}x+\pi\right)$

Propriété (admise)
Soient a et b deux réels, et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Soit I un intervalle tel que pour tout $x \in I$, $ax+b \in J$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = g(ax+b)$.
Alors, la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Propriété (cas particulier des fonctions trigonométriques)
Soient A, ω, et φ des nombres réels (lire ω : "Omega", et φ : "Phi").
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$, et $g(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$.
Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$f'(t) = A \times \omega\cos(\omega t+\varphi)$
$g'(t) = -A \times \omega\sin(\omega t+\varphi)$.

Exercice 6
Dériver les fonctions de l'exercice précédent.

V Approximation affine au voisinage d'un point

Rappel : Si f est dérivable en a, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Si l'on souhaite approcher f par une fonction affine au voisinage de a, la meilleure fonction affine possible est donc $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$. D'où le résultat suivant :

Théorème
Si f est dérivable en a, alors :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } a,$$

$$(\text{ou } x = a+h) \qquad f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \quad \text{pour } h \text{ voisin de } 0.$$

Exercice 7
Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
2. En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $1,01^2$, $1,003^2$, puis $0,99^2$.

VI Dérivée et sens de variation

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
3. Si f' est nulle sur I, alors f est constnate sur I.