1re G. Interrogation n° 8
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Compléter la formule du cosinus sur le produit scalaire.
   Soient A, B, et C trois points distincts du plan.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
2. Expression du produit scalaire en repère orthonormé. Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé du plan.
   $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Exercice 2 (5 points)

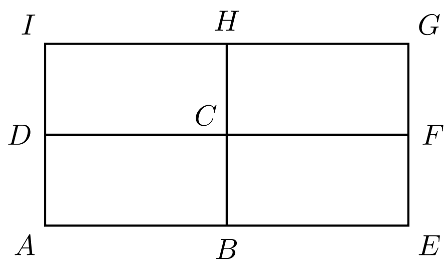
Les questions sont indépendantes.

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. $AB = AC = 2$, et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 2 \times 2 \times \cos(\frac{2\pi}{3}) \\ &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2.}$
2. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $BC = 3$.
   Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.}$
3. ABC est un triangle équilatéral de côté 7.
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 7 \times 7 \times \cos(\frac{\pi}{3}) \\ &= 49 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{49}{2}\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{49}{2}.}$
4. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 6$.
   Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
   Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le mileu de $[AB]$.
   D'après la formule du projeté,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} \\ &= AB \times AC' \\ &= 6 \times \frac{6}{2} \\ &= 18\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18.}$
5. Dans un repère orthonormé, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$, $C(4;0)$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= xx' + yy' \\ &= 3 \times 9 - 3 \times (-2) \\ &= 33\end{aligned}$$
   $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33.}$

Exercice 3 (3 points)

Dans la figure suivante, on donne $AB = BE = 8$, et $AD = DI = 4$.
Calculer les produits scalaires suivants. Justifer.



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = -AB \times EB = -8^2 = -64$
2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = AD \times AI = 4 \times 8 = 32$.
3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{0} = 0$.
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = BC \times BH = 4 \times 8 = 32$.

Exercice 4 (2 points)
Soit $ABCD$ un losange de centre O, tel que $AC = 5$ et $BD = 8$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Justifier.
Par projeté, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BD} = -OB \times BD = -4 \times 8 = -32$

Exercice 5 (3 points)
Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $E(3;4)$, $F(-1;1)$ et $G(2;0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$.
   $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   De même, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = xx' + yy' = -4 \times (-1) + (-3) \times (-4) = 16$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ arrondie à un degré près.
   $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{16+9} = 5$
   $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$
   D'après la formule du cosinus,
   $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG})$.
   Donc $16 = 5 \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{FEG})$.
   Ainsi, $\cos(\widehat{FEG}) = \dfrac{16}{5\sqrt{17}}$.
   Avec la calculatrice, $\widehat{FEG} \approx 39$ degrés.

Exercice 6 (3 points)

1. Soit la fonction Python suivante :
```
def A(n):
    L=[3+7*i for i in range(n+1)]
    return(L)
```
   (a) Écrire A(5) en extension.
   On obtient $[3, 10, 17, 24, 31, 38]$.
   Avec $n = 5$, l'instruction `for i in range(6)` fait parcourir à i les entiers de 0 à 5, soit 6 tours).
   (b) La fonction A renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes d'une suite. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette suite. Justifier.
   Il s'agit de la suite arithmétique de raison 7 et de premier terme $u_0 = 7$. Son terme général est $u_n = u_0 + nr = 3 + 7n$.
2. Écrire une fonction Python B d'argument n qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison 3.
```
def B(n):
    L=[50*3**k for k in range(n+1)]
    return(L)
```

Exercice 7 (2 points)
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 - 7u_n$.

1. Compléter la fonction en Python suivante d'argument n qui renvoie u_n pour un entier n donné en entrée.
```
def Terme(n) :
    u=4
    for k in range(1,n+1):
        u=u**2-7*u
    return(u)
```
2. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n).
```
def Liste(n):
    u=4
    L=[4]
    for k in range(1,n+1):
        u=u**2-7*u
        L=L+[u]
    return(L)
```