Chapitre 5 : Limites de fonctions. Comportement asymptotique

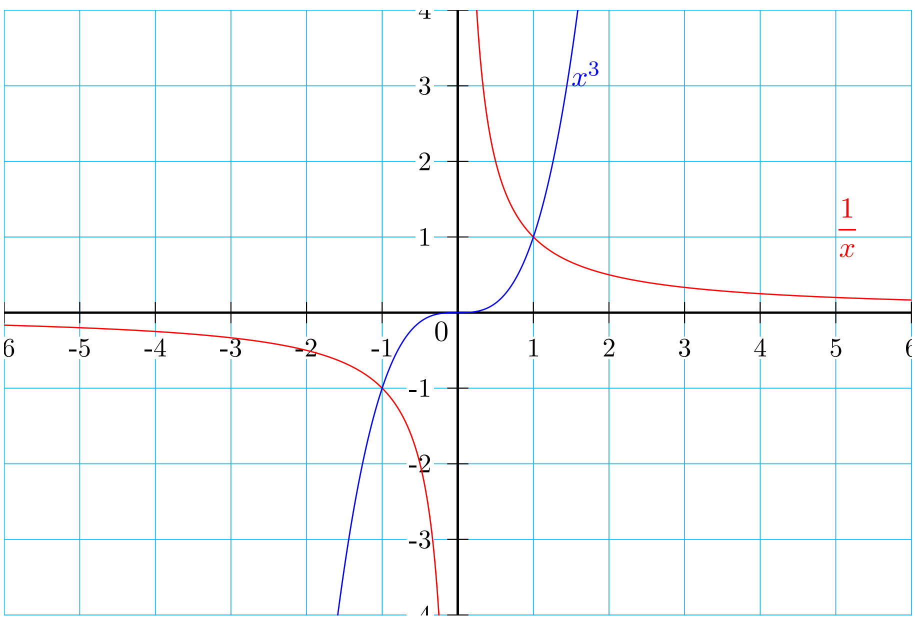
I Limites à l'infini

I.1 Premiers exemples

On s'intéresse au comportement des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x^3$ lorsque x devient très grand ou très petit.

Tableau de valeurs :

x	-10^6	-10^4	-10^2	-10	10	10^2	10^4	10^6
$\dfrac{1}{x}$	-10^{-6}	-10^{-4}	-0.01	-0.1	0.1	0.01	10^{-4}	10^{-6}
x^3	-10^{18}	-10^{12}	-10^6	-1000	1000	10^6	10^{12}	10^{18}



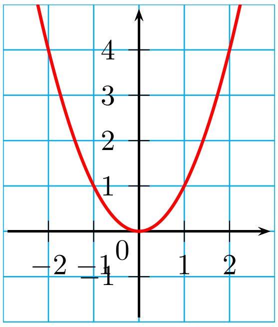
On remarque que lorsque x devient très grand, les valeurs de $\dfrac{1}{x}$ deviennent très proches de 0. On dit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$ (ou tend vers 0 en $+\infty$).
On note $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
De même, lorsque x est très grand, les valeurs de x^3 deviennent très grandes, on dit que la fonction cube admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, on a :
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.
$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

Définition
Soient f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (sur un intervalle $[a;+\infty[$), et ℓ un nombre réel.

1. On dit que la limite de f en $+\infty$ est ℓ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ lorsque tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty;B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.

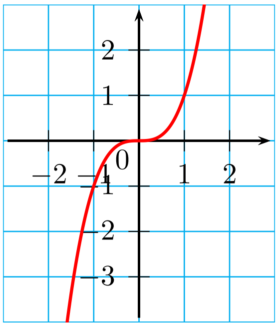
I.2 Limites à l'infini de fonctions usuelles

fonction carré



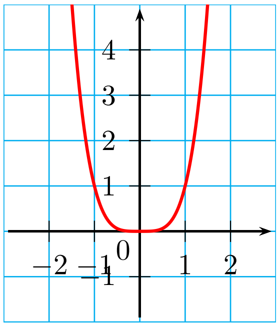
$f(x)=x^2$

fonction cube



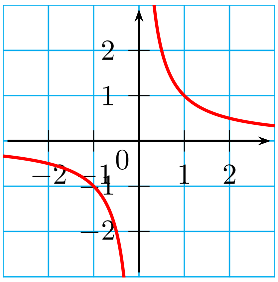
$f(x)=x^3$

puissance quatrième



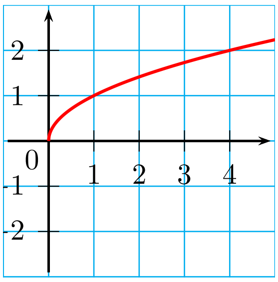
$f(x)=x^4$

fonction inverse



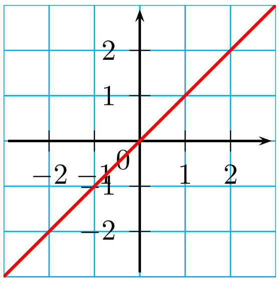
$f(x)=\dfrac{1}{x}$

fonction racine carrée

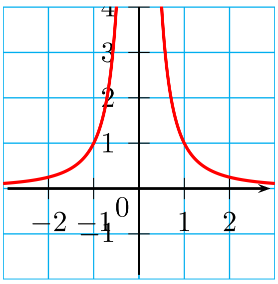


$f(x)=\sqrt{x}$

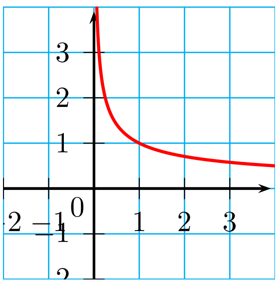
fonction identité



$f(x)=x$

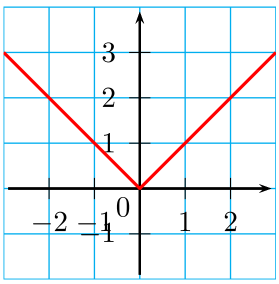


$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$



$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

valeur absolue



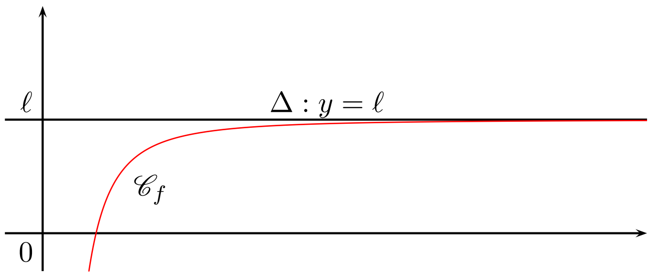
$f(x)=|x|$

$f(x)$	D_f	limite en $-\infty$	limite en $+\infty$
x	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
x^2	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
x^n, $n \geqslant 1$	$\mathbb{R}$	$+\infty$ si n est pair $-\infty$ si n est impair	$+\infty$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	pas de sens	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	pas de sens	0

Remarque
Certaines fonctions n'ont pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. C'est par exemple le cas de cos et sin qui oscillent sans cesse entre -1 et 1 sans tendre vers une limite réelle.

I.3 Asymptote horizontale

Dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, ℓ tant un nombre réel, il semble que la courbe de f devienne infiniment proche de la droite horizontale Δ qui a pour équation $y = \ell$.



Définition
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $(\ell \in \mathbb{R})$ on dit que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
De même, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

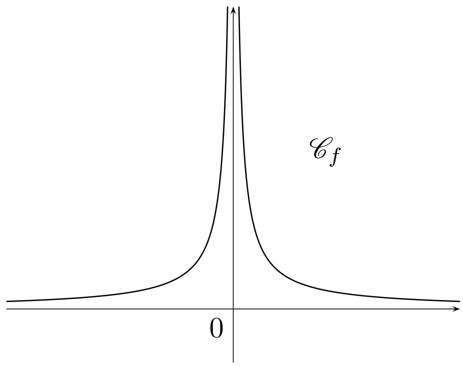
II Limite infinie en a (a réel)

Cadre : Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction qui est définie au voisinage de a mais pas en a. On se propose de chercher les limites éventuelles de f lorsque x tend vers a.

II.1 Deux exemples de base

Premier exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $a = 0$.
Tableau de valeurs :

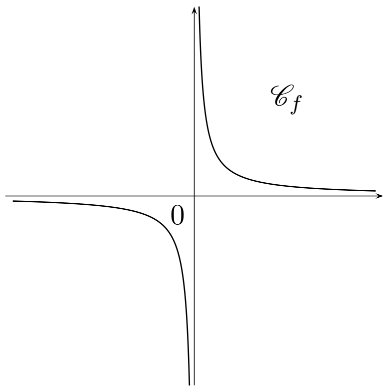
x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
$f(x)$	1	100	10000	10^6	non def	10^6	10000	100	1



Il est clair que lorsque x prend des valeurs proches de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes.
Nous dirons donc que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0.
Notation : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On observe que lorsque x tend vers 0, la courbe de f devient infiniment proche de l'axe des ordonnées (Oy).
Nous dirons que (Oy) est asymptote $\mathscr{C}_f$ en 0.

Deuxième exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **et** $a = 0$**.**



1. Si $x > 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à droite de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes.
   Nous dirons donc que f admet $+\infty$ comme limite à droite lorsque x tend vers 0.
   Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

2. Si $x < 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à gauche de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment petites.
   De même, nous dirons que f admet $-\infty$ comme limite à gauche lorsque x tend vers 0.
   Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

Là encore, lorsque x tend vers 0, la courbe de f devient infiniment proche de l'axe des ordonnées (Oy) : (Oy) est asymptote $\mathscr{C}_f$ en 0.

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a - r; a[$ ou $]a; a + r]$, avec $r > 0$.

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

II.2 Quelques limites en 0

Théorème

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec n pair ont $+\infty$ pour limite en 0.
2. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec n impair ont $+\infty$ pour limite à droite en 0, et $-\infty$ pour limite à gauche en 0.

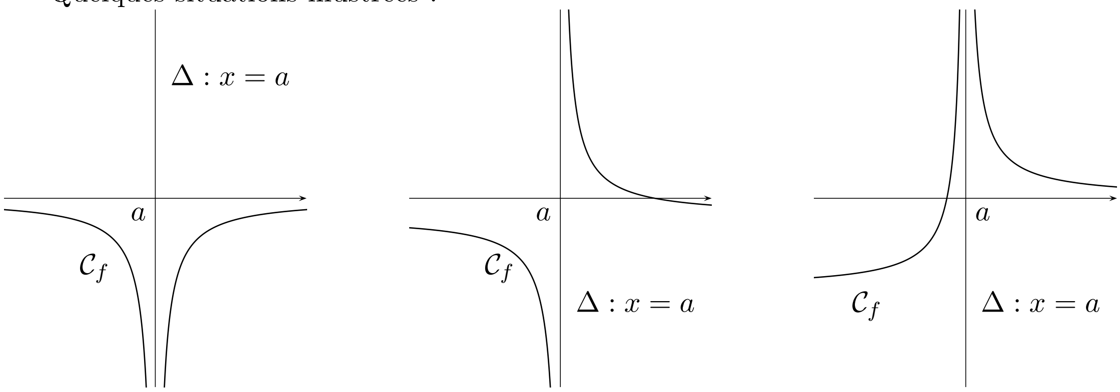
Remarque
Si la limite d'une fonction en a existe, alors elle est unique.
En particulier, si f admet deux limites différentes à droite et à gauche en a, on considère que f n'a pas de limite en a.
Par exemple, la fonction inverse n'a pas de limite en 0 car $\lim\limits_{0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

II.3 Asymptote verticale

Définition
Dès que l'on est dans l'une des situations suivantes, on dit que la droite Δ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en a :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Quelques situations illustrées :



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Remarque (sur les asymptotes)

1. Une valeur interdite pour la fonction donne très souvent une asymptote verticale pour sa courbe.
2. On étudie la position relative de la courbe et de son asymptote uniquement dans le cas des asymptotes horizontales ou obliques.

II.4 Exemple de calcul de limite à droite et à gauche d'un réel

La méthode est la suivante :

1. calculer la limite du numérateur,

2. dresser le tableau de signe du dénominateur,
3. en déduire la limite du dénominateur.
4. conclure avec les opérations (voir III).

Exemple : $f(x) = \dfrac{x-5}{3-x}$
La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ mais n'est pas définie en 3.
On peut chercher ses limites à droite et à gauche de 3.
Au numérateur, $\lim\limits_{x \to 3} x - 5 = 3 - 5 = -2 < 0$.
Le tableau de signe de $3 - x$ est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to 3-} 3 - x = 0+$
On en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -\infty$.
De même, $\lim\limits_{x \to 3+} 3 - x = 0-$
De même, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = +\infty$.
On peut en déduire que la courbe de f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 3$.

III Limites et opérations

Tous les résultats suivants sont admis.
f et g sont des fonctions qui admettent une limite en a, (a désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$). ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

III.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite en a						

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 2x + \dfrac{1}{x}$

III.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite en a	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite en a									

Exemple :
$\lim\limits_{+\infty} 3x^2\sqrt{x}$

III.3 Limite d'un quotient

III.3.a cas où la limite de g n'est pas nulle

Si f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a							

III.3.b cas où la limite de g est nulle

Si f a pour limite en a	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite en a	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
Alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite en a					

Exemple :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4}{3x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4}{3x^2}$

Remarque (Récapitulatif des formes indéterminées)
Les 4 formes indéterminées sont donc : $+\infty - \infty$, $\pm\infty \times 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, et $\dfrac{0}{0}$.
Dans tous les autres cas, on peut conclure directement avec les opérations.

III.4 Quelques indications pour lever les indéterminations

1. Forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$:
   Reconnaître la définition du nombre dérivé d'une fonction.
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.
2. Transformer l'écriture : développer ou factoriser.
   Lorsque x tend vers l'infini, mettre en facteur les plus grandes puissances de x possibles au numérateur et au dénominateur.
3. Il existe un théorème sur les polynômes et fractions rationnelles qui s'applique lorsque $x \to \pm\infty$ (voir ci-dessous).

IV Théorèmes sur les limites de fonctions

IV.1 Limite par comparaison

Dans cette partie, a, b et ℓ peuvent désigner des nombres réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème

1. **Théorème des « gendarmes »**
   Si, pour x assez voisin de a, on a l'encadrement $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, et si u et v ont la même limite ℓ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. **Cas d'une limite infinie**
   Si, pour x assez voisin de a, on a l'inégalité $u(x) \leqslant f(x)$, et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
   (Énoncé analogue avec $f(x) \leqslant v(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$)

Exemple : Étudier le comportement de $x \mapsto x - 2\sin x$ en $+\infty$.
Comme $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $2 \geqslant -2\sin x \geqslant -2$,
et donc $f(x) \geqslant x - 2$.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$.
Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

IV.2 Limite d'une fonction composée

Définition
Soient $f\ : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La fonction $g \circ f$ est alors définie sur I par :

$$\text{pour tout } x \in I,\ (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Pour que $g \circ f$ soit bien définie, il faut que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

Remarque
Dans $g \circ f$, l'ordre des fonctions a son importance .
Exemple : $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 3$.
Déterminer les expressions de $g \circ f$ et de $f \circ g$. Comparer.

Théorème (limite d'une fonction composée)
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

Exemple : Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $g(x) = \sqrt{2 + \dfrac{3}{x}}$.
(Réponses : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} g = \sqrt{2}$)

IV.3 Limites à l'infini des polynômes et fractions rationnelles

Théorème (Polynômes et fractions rationnelles)

1. Un polynôme a la même limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) que son terme de plus haut degré.
2. Une fraction rationnelle a la même limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) que le quotient simplifié de ses termes de plus haut degré.

Exemples :

1. $P(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 1$.
   Alors $\lim\limits_{-\infty} P = \lim\limits_{-\infty} 3x^5 = -\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{-2x^3 + x^2 + 4x - 5}{5x^4 + 3x^3 + 2}$.
   Alors $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-2x^3}{5x^4} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-2}{5x} = 0$.