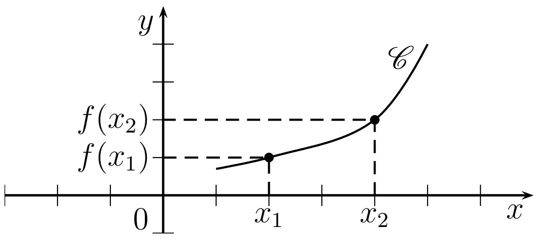
Chapitre 10 : Variations des fonctions et extrema

I Fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle

I.1 Fonction croissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

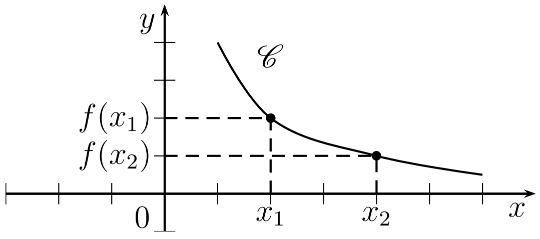


Remarque
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).

I.2 Fonction décroissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

Exercice 1 (corrigé)
On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les images par f de -3, -1, 0, 2, et 5.
   $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $f(0) = 0^2 = 0$; $f(2) = 2^2 = 4$, et $f(5) = 5^2 = 25$.

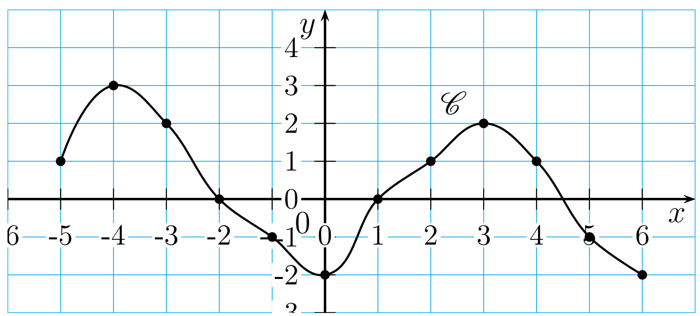
2. En donnant un contre-exemple, montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
On a $-3 < 2$, et $f(-3) > f(2)$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer de même que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a $0 < 2$, et $f(0) < f(2)$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (corrigé)
Montrer que la fonction affine f définie par $f(x) = 3x+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Soient a, b deux nombres réels.
Supposons que $a < b$.
$f(a) - f(b) = (3a+1) - (3b+1) = 3a - 3b = 3(a-b)$.
Comme $a < b$, on a $a - b < 0$.
En multipliant par 3>0, le sens de l'inégalité est conservé. Donc $3(a-b) < 0$.
Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.
On a montré que pour tous réels a et b, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II Tableau de variations d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variations.

Exemple : voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 6]$.



Le tableau de variation de f est :

x	-5		-4		0		3		6
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

III Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.

Exemple : Sur l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5; 6]$ est 3, il est atteint en -4.
Le minimum de f est -2, il est atteint en 0 et en 6.

Exercice 3 (corrigé)
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-3		-1		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

De plus, l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4.

1. Indiquer le maximum de f sur$[-3;5]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
Le maximum de f est 4. Il est atteint en -3 (ce qui signifie lorsque $x=-3$).

2. Comparer $f(-2,5)$ et $f(-2,4)$. Justifier.
$-2,5 < -2,4$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3;1]$ qui contient $-2,5$ et $-2,4$.
Donc $f(-2,5) \leqslant f(-2,4)$.

3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
Lorsque $x \in [-3;-1]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

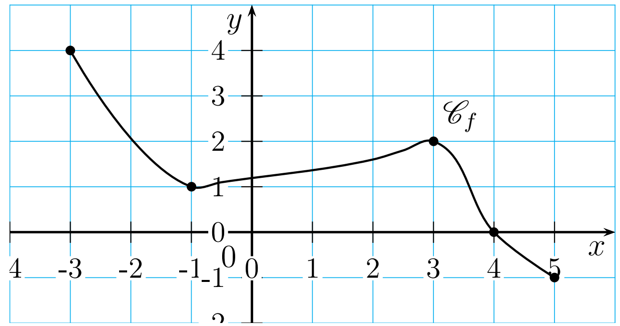
4. Donner un encadrement de $f(-2)$ et de $f(3,6)$. Peut-on comparer ces deux nombres ?
$1 \leqslant f(-2) \leqslant 4$, et $-1 \leqslant f(3,6) \leqslant 2$.
Cela ne suffit pas pour comparer ces deux images (-2 et 3,6 ne sont pas dans un même intervalle où f est croissante ou décroissante.

5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

   (a) "Pour tout $x \in [-3;5]$, $f(x) \geqslant -2$."
   Vrai, car le minimum de f sur $[-3;5]$ est -1.
   Donc pour tout $x \in [-3;5]$, $f(x) \geqslant -1 > -2$.

   (b) "Il existe au moins un réel x dans l'intervalle $[-3;5]$ tel que $f(x) > x$."
   Vrai : $x=-3$ convient. En effet, $f(-3)=4>-3$.

6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec <u>toutes</u> les données de l'énoncé.
En plus du tableau de variation, on sait que l'équation $f(x)=0$ a une solution qui est 4, donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $(4;0)$.

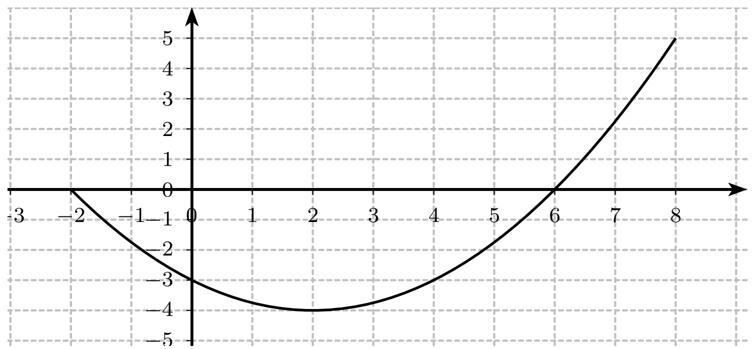


7. Dresser le tableau de signe de f.

x	-3		4		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	

En effet, $f(x)>0$ pour tout $x \in [-3;4[$, $f(x)<0$ pour tout $x \in]4;5]$, et $f(x)=0$ ssi $x=4$.

Exercice 4 (corrigé)
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
f est définie sur l'intervalle $[-2;8]$.
2. Lire $f(4)$ et $f(6)$.
$f(4)=-3$ et $f(6)=0$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

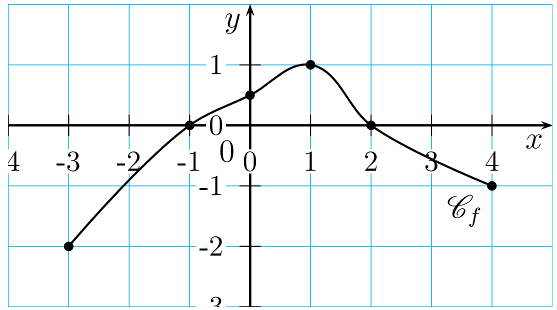
x	-2		2		8
$f(x)$	0	↘	-4	↗	5

4. Donner le maximum de f sur son ensemble de définition, et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.
   Le maximum de f est 5, il est atteint lorsque $x = 8$.
5. Donner le minimum de f et préciser en quelle valeur il est atteint.
   Le minimum de f est -4, il est atteint lorsque $x = 2$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à -3. Les solutions sont 0 et 4.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < -3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement inférieure à -3. L'ensemble solution est l'intervalle $]0;4[$.

Exercice 5 (corrigé)
Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3		1		4
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-1

1. Comparer $f(2,5)$ et $f(3,4)$. Justifier.
   $2,5 < 3,4$, et f est décroissante sur l'intervalle $[1;4]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(2,5) \geqslant f(3,4)$.
2. Comparer $f(-0,4)$ et $f(-0,1)$. Justifer. $-0,4 < -0,1$, et f est croissante sur l'intervalle $[-3;1]$ qui contient ces deux nombres. Donc $f(-0,4) \leqslant f(-0,1)$.
3. On admet de plus que f vérifie les conditions suivantes :
   Les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, et $f(0) = \frac{1}{2}$.
   Tracer une courbe de fonction compatible avec toutes les données de l'énoncé.
   Comme les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, la courbe passe par les points de coordonnées $(-1;0)$, et$(2;0)$.
   Comme $f(0) = \frac{1}{2}$, la courbe passe aussi par le point $(0;\frac{1}{2})$.



IV Variation des fonctions de référence

IV.1 Fonctions affines

Théorème
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, f est constante et $\mathscr{C}_f$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Pour u et v deux nombres réels distincts, le taux d'accroissement de f entre u et v est le rapport $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$.

Exercice 6 (corrigé)
Donner le sens de variation des fonctions affines.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x - 11$.
   Comme $a = \dfrac{1}{4} > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - 3x$.
   Comme $a = -3 < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour tous nombres réels distincts u et v, le taux de variation de f entre u et v est égal à a :

$$\text{pour tous } u \text{ et } v \text{ réels distincts, on a } \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = a.$$

Méthode pour déterminer l'expression d'une fonction affine f dont on connaît deux images :

— Le coefficient directeur est $a = \dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}$.
— Alors, $f(x) = ax + b$, et a est connu.
  On trouve b en remplaçant x par u ou v dans l'égalité $f(x) = ax + b$.

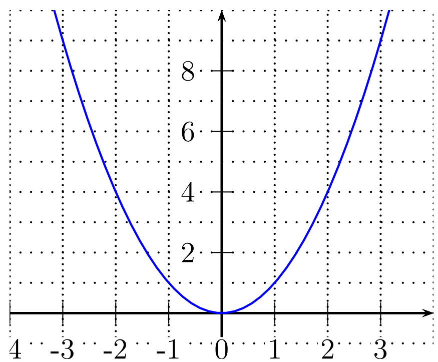
Exercice 7 (corrigé)
Déterminer l'expression de la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(10) = 1$.

Comme f est une fonction affine, il existe des réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.
Par propriété, $a = \dfrac{f(10)-f(2)}{10-2} = \dfrac{1-5}{8} = -\dfrac{1}{2}$.
Donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + b$.
Enfin, on sait que $f(2) = 5$, soit $-\dfrac{1}{2} \times 2 + b = 5$, $-1 + b = 5$,et donc $b = 6$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

IV.2 Fonction carré

Théorème (sens de variation)
La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$



Démonstration
Soient a, $b \in]-\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.
Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $]-\infty; 0]$), $a + b < 0$.
D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 > 0$.
Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On montre de façon analogue qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$. □

Exercice 8 (corrigé)
Comparer sans calculatrice :

1. $5,023^2$ et $5,027^2$.
   $5,023 < 5,027$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $[0; +\infty[$ où la fonction carré est croissante.
   Donc $5,032^2 \leqslant 5,027^2$.

2. $(-1,27)^2$ et $(-1,33)^2$.
   $-1,33 < -1,27$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0]$ où la fonction carré est décroissante.
   Donc $(-1,33)^2 \geqslant (-1,27)^2$.

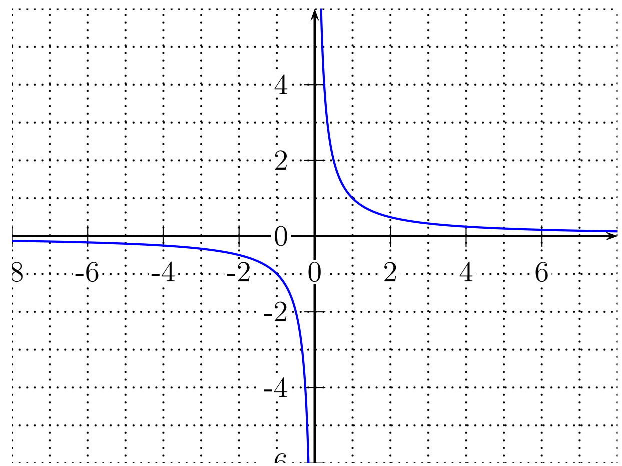
Exercice 9 (corrigé)
Donner le meilleur encadrement de x^2.
Indication : exploiter le tableau de variation de la fonction carré.

1. Si $2 < x < 3$, alors $4 < x^2 < 9$
2. Si $-5 < x < -1$, alors $1 < x^2 < 25$
3. Si $-5 \leqslant x \leqslant -3$, alors $9 \leqslant x^2 \leqslant 25$
4. Si $1 \leqslant x \leqslant 7$, alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 49$
5. Si $-6 \leqslant x \leqslant 2$, alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 36$
6. Si $-2 < x < 9$, alors $0 \leqslant x^2 < 81$

IV.3 Fonction inverse

Théorème
La fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



Démonstration
Soient a, b deux réels de l'intervalle $]-\infty; 0[$.
Supposons $a < b$.
$f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.
Comme $a < 0$ et $b < 0$, on a $ab > 0$.
Comme $a < b$, on a $b - a > 0$.
Par quotient, $f(a) - f(b) = \dfrac{b-a}{ab} > 0$, donc $f(a) > f(b)$.
Don, pour tous $a, b \in]-\infty; 0[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
f est décroissante sur $]-\infty; 0[$.
On montre de façon analgue que f est décroissante sur $]0; +\infty[$. □

Remarque
La fonction inverse n'est pas définie en 0.
On ne peut parler de fonction croissante ou décroissante que sur des intervalles (l'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ n'est pas un intervalle).

Exercice 10 (corrigé)
Comparer les inverses des nombres suivants sans calculatrice :

1. $5,023$ et $5,027$.
   $5,023 < 5,027$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $]0; +\infty[$ où la fonction inverse est décroissante.
   Donc $\dfrac{1}{5,023} \geqslant \dfrac{1}{5,027}$.
2. $-1,27$ et $-1,33$.
   $-1,33 < -1,27$ et ces deux nombres appartiennent à l'intervalle $]-\infty; 0[$ où la fonction inverse est décroissante.
   Donc $\dfrac{1}{-1,33} \geqslant \dfrac{1}{-1,27}$.

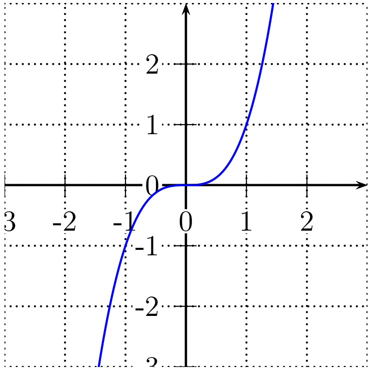
Exercice 11 (corrigé)
Donner le meilleur encadrement de $\dfrac{1}{x}$.
Indication : exploiter le tableau de variation de la fonction inverse

1. Si $2 < x < 3$, alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$
2. Si $-5 < x < -1$, alors $-1 < \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{5}$
3. Si $-5 \leqslant x \leqslant -3$, alors $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$
4. Si $1 \leqslant x \leqslant 7$, alors $\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

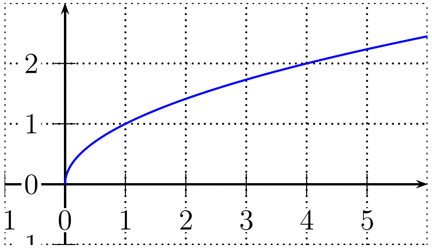
IV.4 Fonction cube

Propriété (admise)
La fonction cube définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ (la fonction cube est impaire).



IV.5 Fonction racine carrée



Propriété (admise)
La fonction racine carrée définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.