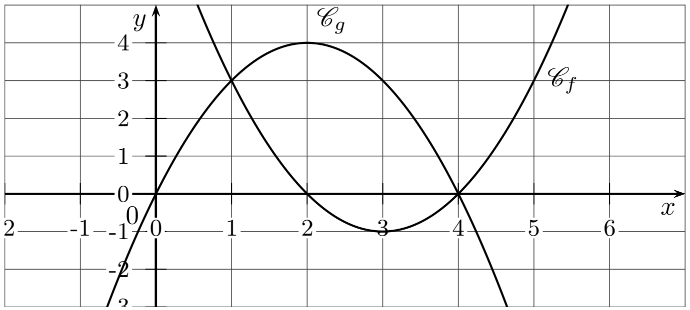
2de. Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de variation et le tableau de signe de f.
Variations de f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

Signe de f

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dresser le tableau de variation et le tableau de signe de g.
Variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	

Signe de g

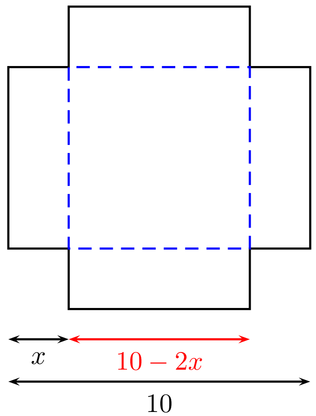
x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Expliquer la méthode.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et de $\mathscr{C}_g$. $S = \{1; 4\}$.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Expliquer la méthode.
Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$. $S =]1; 4[$.

Exercice 2

On dispose d'un carré de côté 10 cm. Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x (cm), et on relève les bords par pliage (suivant les pointillés).
La boîte obtenue est un pavé droit à base carrée.
On souhaite déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.



1. Calculer le volume de la boîte si $x = 2$.
$10 - 2 - 2 = 6$.
Si $x = 2$, le pavé a une base carrée de côté 6 cm et une hauteur de 2 cm.
Alors, $V = L \times \ell \times h = 6 \times 6 \times 2 = 72$.
$\boxed{\text{Pour } x = 2 \text{ cm, le volume de la boîte est de } 72 \text{ cm}^3.}$

2. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
Il est clair que $x \geqslant 0$ et $2x \leqslant 10$.
$\boxed{\text{Donc } x \in [0; 5].}$

3. On note $V(x)$ le volume de la boîte.
Montrer que $V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$.

De façon générale, le pavé a une base carrée de côté $(10-2x)$, et sa hauteur mesure x.

$$\begin{aligned} V(x) &= L \times \ell \times h \\ &= (10-2x)^2 \times x \\ &= (100 - 2\times 10 \times 2x + (2x)^2) \times x \\ &= (100-40x+4x^2)\times x \\ &= 100x - 40x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in [0;5],\ V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3.}$

4. Retrouver le volume pour $x=2$ à l'aide de la fonction V.

$$\begin{aligned} V(2) &= 100\times 2 - 40 \times 2^2 + 4 \times 2^3 \\ &= 200 - 40\times 4 + 4 \times 8 \\ &= 200 - 160 + 32 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On retrouve que la boîte a un volume de } 72 \text{ cm}^3.}$

5. Calculer $V(3)$.

$$\begin{aligned} V(3) &= 100\times 3 - 40 \times 3^2 + 4 \times 3^3 \\ &= 300 - 40\times 9 + 4 \times 27 \\ &= 300 - 360 + 108 \\ &= 48 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour } x = 3 \text{ cm, le volume est de } 48 \text{ cm}^3.}$

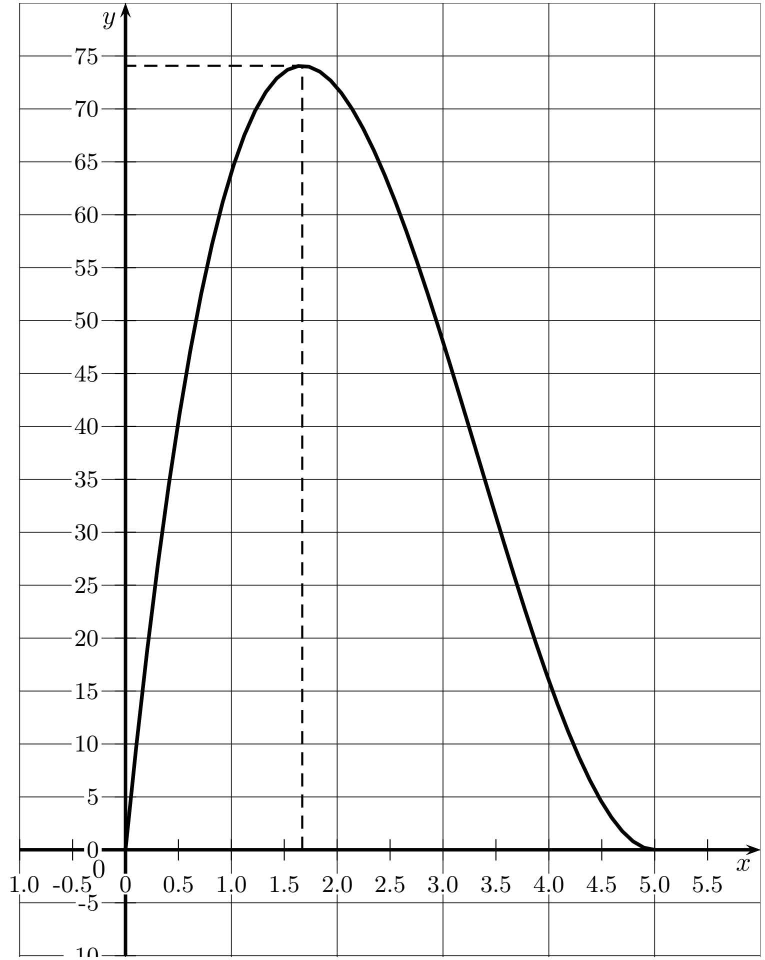
6. Calculer l'image de $\dfrac{5}{3}$ par V (valeur exacte, puis arrondie à 0,01 près).

$$\begin{aligned} V\left(\frac{5}{3}\right) &= 100 \times \frac{5}{3} - 40 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^3 \\ &= \frac{500}{3} - 40 \times \frac{25}{9} + 4 \times \frac{125}{27} \\ &= \frac{4500}{27} - \frac{40\times 25 \times 3}{27} + \frac{500}{27} \\ &= \frac{4500 - 3000 + 500}{27} \\ &= \frac{2000}{27} \\ &\approx 74.07 \end{aligned}$$

7. (a) À l'aide de la calculatrice compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$V(x)$	0	40.5	64	73.5	72	62.5	48	31.5	16	4.5	0

(b) Représenter graphiquement la fonction V ci-dessous.



(c) Déterminer graphiquement pour quelle(s) valeurs de x le volume est maximal. Quel est ce volume maximal ?

Le volume semble être maximal pour $x = \dfrac{5}{3}$ (1.67 cm environ).
Le volume maximal de la boîte est de 74 cm^3 environ.
La valeur exacte du volume maximal est $V(\frac{5}{3}) = \dfrac{2000}{27}$ (admis en 2de)