1re G. Interrogation de mathématiques n° 4
Correction du Sujet 2

Exercice 1 (cours, 4 points)

1. Opérations sur les dérivées.

   (a) $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$

   (b) $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$

   (c) Si v ne s'annule pas sur I, alors
   $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
   et $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

2. Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$.
   $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Exercice 2 (3 points)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit (d) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (d), et préciser l'absicsse du point correspondant.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

La tangente est parallèle à (d) ssi elle a le même coefficient directeur : $\dfrac{1}{4}$.

Soit $x > 0$.

On résout l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}$, d'où $\sqrt{x} = 2$, et $x = 4$.

Il y a une seule tangente à $\mathscr{C}$ qui soit parallèle à (d), c'est la tangente au point d'abscisse 4.

Exercice 3 (5 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (3-2x)\sqrt{x}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ f'(x) = -2\sqrt{x} + (3-2x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.}$

2. f est définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{11}{x^2 - 3x}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x > 3,\ f'(x) = 11 \times \dfrac{-(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \dfrac{-22x+33}{(x^2-3x)^2}.}$

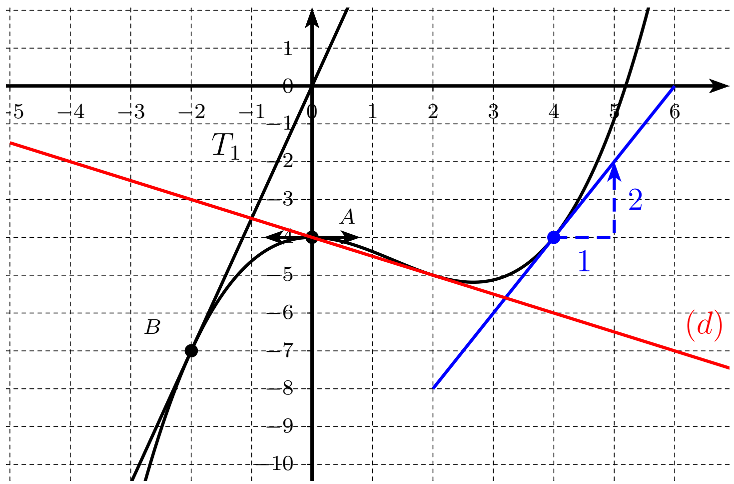
3. f est définie sur $]-9;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5-x}{x+9}$.
   $\boxed{\text{Pour } x > -9,\ f'(x) = \dfrac{-1(x+9) - (5-x) \times 1}{(x+9)^2} = -\dfrac{14}{(x+9)^2}.}$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x-6)^3$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 5 \times 3(5x-6)^2 = 15(5x-6)^2.}$

Exercice 4 (8 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.



A : Lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
   $\boxed{f(-2) = -7 \text{ et } f(0) = -4.}$
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.
   $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2, c'est donc le coefficient directeur de T_1. $\boxed{\text{Donc } f'(-2) = 3,5.}$
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A. Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. $\boxed{f'(0) = 0.}$

B : Calculs de dérivées et applications

On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{8} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = \frac{3}{8}x^2 - x.}$
2. Vérifier que $f'(4) = 2$ et tracer la tangente associée sur le graphique. On fera apparaître les traits de construction.
   $\boxed{f'(4) = \frac{3}{8} \times 4^2 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2.}$
   On trace la tangente à la courbe au point d'abscisse 4. Comme $f'(4) = 2$, son coefficient directeur est 2.
3. (a) Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{2}x - 4$.
   $f'(2) = \frac{3}{8} \times 2^2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.
   $f(2) = \frac{1}{8} \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 2^2 - 4 = 1 - 2 - 4 = -5$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\frac{1}{2}(x-2) - 5 = -\frac{1}{2}x - 4$.
   $\boxed{\text{La tangente } (d) \text{ à la courbe de } f \text{ au point d'abscisse 2 a bien pour équation } y = -\frac{1}{2}x - 4.}$

   (b) Tracer (d).

x	0	2
y	-4	-5

   (c) Montrer $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 4\right) = \frac{1}{8}x(x-2)^2$.

$$
\begin{aligned}
f(x) - (-\frac{1}{2} - 4) &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4 + \frac{1}{2}x + 4 \\
&= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
&= \frac{1}{8}x \times (x^2 - 4x + 4) \\
&= \frac{1}{8}x(x-2)^2
\end{aligned}
$$

   (d) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).
   On étudie le signe de $f(x) - (-\frac{1}{2}x - 4)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{1}{8}x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\frac{1}{8}x(x-2)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses 0 et 2.
Sur $]-\infty; 0[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
Sur $]0; 2[\cup]2; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d).