Corrigé du devoir maison n° 13

Partie A : Modélisation discrète

1. On cherche T_3 :
   $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$; $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45{,}812\,5$;
   $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53{,}940\,625$
   La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54° C.
2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
   - Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.
     D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.
     Donc $T_{p+1} = 0,85\,(100 - 75 \times 0,85^p) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$
     La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
   - La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85° C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:
   $$\begin{array}{rcll} T_n > 85 & \Longleftrightarrow & 100 - 75 \times 0,85^n > 85 & \\ & \Longleftrightarrow & 15 > 75 \times 0,85^n & \\ & \Longleftrightarrow & 0,2 > 0,85^n & \\ & \Longleftrightarrow & \ln 0,2 > \ln\left(0,85^n\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \Longleftrightarrow & \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n & \text{car } \ln 0,85 < 0 \end{array}$$
   Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

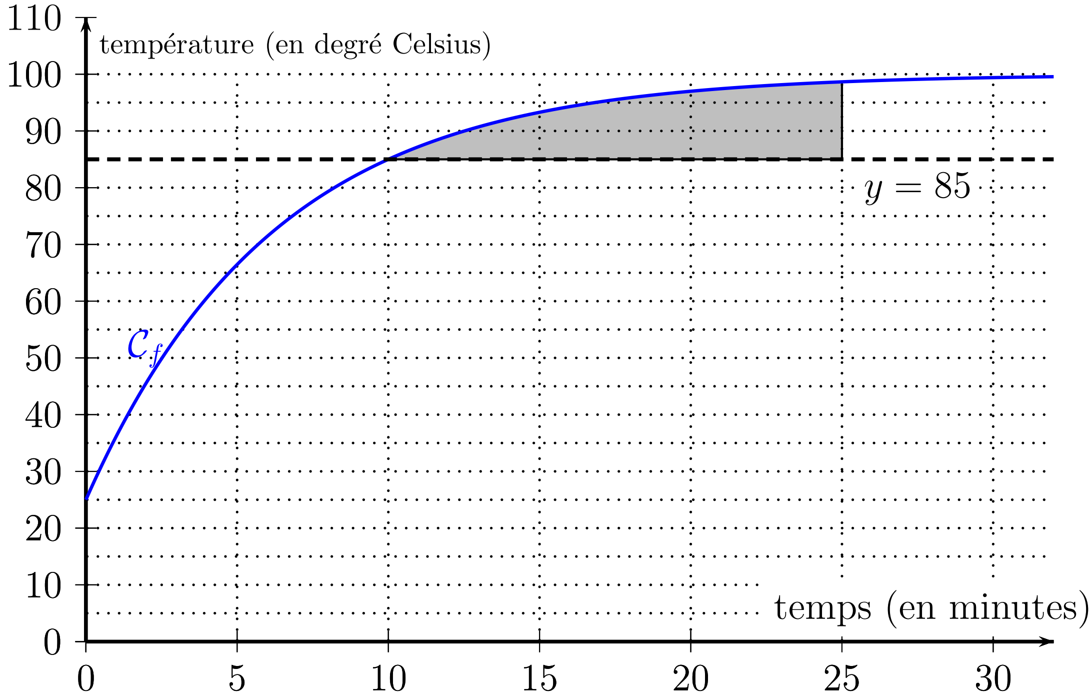
Partie B : Modélisation continue

1.(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \times \ln 5\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) $f(10) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75\mathrm{e}^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$

Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geqslant 10$, alors $f(x) \geqslant f(10)$ ce qui veut dire que $f(x) \geqslant 85$.

2.(a)



$A(25)$ est représentée en gris sur le graphique. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5 \times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathcal{A}(25) > 80$.

(b) $A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,\mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) - 85\right]\mathrm{d}t$

$A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\mathrm{d}t$

$A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} 15\,\mathrm{d}t - \int_{10}^{\theta} 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 15\,[t]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$

$A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$

(c) La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathcal{A}(20) > 80$.

$\mathcal{A}(20) = 15(20 - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20}$

$\mathcal{A}(20) = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]$

$\mathcal{A}(20) = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{1}{5}\right] = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{5}\right]$

$\mathcal{A}(20) = 150 + \dfrac{750}{\ln 5} \times \dfrac{-4}{25} = 150 - \dfrac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.