Correction du contrôle n°1

Exercice 1 (2 points)

Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes. Justifier.

1. $u_n = (5n^2+3)(2-1,8^n)$.
   $\lim 5n^2+3 = +\infty$.
   Comme $1,8>1$, $\lim 1,8^n = +\infty$, donc $\lim 2-1,8^n = -\infty$.
   $\boxed{\text{Par produit, } \lim u_n = -\infty.}$

2. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3+\cos(n)}{n}$.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3+\cos(n) \leqslant 4$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n}$.
   $\lim \dfrac{2}{n} = 0$, et $\lim \dfrac{4}{n} = 0$.
   $\boxed{\text{D'après le théorème des gendarmes, } \lim u_n = 0.}$

Exercice 2 (4,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = \dfrac{2}{5}u_0 + 3 = \dfrac{2}{5} \times 8 + 3 = \dfrac{31}{5}$.
   $u_2 = \dfrac{2}{5}u_1 + 3 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{31}{5} + 3 = \dfrac{137}{25}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 5$.
   Initialisation
   $u_0 = 8$, et $3\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 + 5 = 3+5 = 8$.
   Donc $u_0 = 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 + 5$.
   Hérédité
   Considérons un entier $k \geqslant 0$.
   Supposons que $u_k = 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + 5$.
   Alors, $u_{k+1} = \dfrac{2}{5}u_k + 3 = \dfrac{2}{5} \times \left(3\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + 5\right) + 3 = 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1} + 2 + 3 = 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1} + 5$.
   Conclusion
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ u_n = 3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 5.}$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Comme $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$.
   $\boxed{\text{Donc, par produit et somme, } \lim u_n = 5.}$

4. Soit (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\
&= 3\left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5 + 3\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 5 + \ldots + 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 \\
&= 3\left[\left(\frac{2}{5}\right)^0 + \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + (n+1) \times 5 \\
&= 3\frac{1-(2/5)^{n+1}}{1-2/5} + 5(n+1) \\
&= 5 \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] + 5n + 5
\end{aligned}$$

   (b) En déduire la limite de la suite (S_n).
   Comme $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$.
   Donc $\lim 5 \times \left[1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right] = 5 \times 1 = 5$.
   Par ailleurs, $\lim 5n+5 = +\infty$.
   $\boxed{\text{Par somme, } \lim S_n = +\infty.}$

Exercice 3 (6,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2, et u_3.
   $\boxed{u_1 = 0+0+3 = 3 \text{ et } u_2 = 3\times 3 - 2 + 3 = 10}$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.

- $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

$\lim n = +\infty$.

$\boxed{\text{D'après le théorème de comparaison } \lim (u_n) = +\infty.}$

3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n = v_0 \times q^n = 3^n.}$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

$\boxed{\text{On a, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + n - 1 \text{ donc } u_n = 3^n + n - 1.}$

4. Compléter l'algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} > 10\,000$. On ne demande pas la valeur de n_0.

Traitement
Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 0
Tant que $U \leqslant 10\,000$
$\quad 3U - 2N + 3 \to U$
$\quad N + 1 \to N$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

Exercice 4 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z^2 - 5z + 3 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 36 = -11 < 0$.

$z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{5 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{6}$.

$z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{5 + \mathrm{i}\sqrt{11}}{6}$.

$\boxed{\text{Les solutions sont } \dfrac{5 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{6}, \text{ et } \dfrac{5 + \mathrm{i}\sqrt{11}}{6}.}$

2. $(z + 3 - \mathrm{i})(\overline{z} + 8 - \mathrm{i}) = 0$.

$(z + 3 - \mathrm{i}) = 0$ ou $(\overline{z} + 8 - \mathrm{i}) = 0$

$z = -3 + \mathrm{i}$, ou $\overline{z} = -8 + \mathrm{i}$ soit $z = -8 - \mathrm{i}$.

$\boxed{\text{Les solutions de cette équation sont } -3 + \mathrm{i} \text{ et } -8 - \mathrm{i}.}$

3. $9\mathrm{i}z = 5\overline{z} - 3 + 4\mathrm{i}$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

L'équation s'écrit $9\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = 5(x - \mathrm{i}y) - 3 + 4\mathrm{i}$

Cela revient à $(-5x - 9y + 3) + \mathrm{i}(9x + 5y - 4) = 0$.

D'où le système : $\begin{cases} -5x - 9y + 3 = 0 \\ 9x + 5y - 4 = 0 \end{cases}$,

puis $\begin{cases} -45x - 81y + 27 = 0 \\ 45x + 25y - 20 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} -56y + 7 = 0 \\ x = \dfrac{4 - 5y}{9} \end{cases}$,

et donc $\begin{cases} y = \dfrac{1}{8} \\ x = \dfrac{27}{8 \times 9} = \dfrac{3}{8} \end{cases}$

$\boxed{\text{L'équation a une solution qui est } z = \dfrac{3 + \mathrm{i}}{8}.}$

Exercice 5 (2,5 points)

Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y des nombres réels.

Pour tout $z \neq -2 - \mathrm{i}$, on pose $Z = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$.

1. Mettre Z sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z-\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}} \\ &= \frac{x+\mathrm{i}(y-1)}{x+2+\mathrm{i}(y+1)} \\ &= \frac{[x+\mathrm{i}(y-1)]\times[x+2-\mathrm{i}(y+1)]}{(x+2)^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x+2)+(y-1)(y+1)+\mathrm{i}[(x+2)(y-1)-x(y+1)]}{(x+2)^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que Z soit réel.
Soit $z \neq -2-\mathrm{i}$.
$Z \in \mathbb{R}$ ssi $\mathrm{Im}(Z)=0$, ssi $(x+2)(y-1)-x(y+1)=0$, soit $-2x+2y-2=0$, $y=x+1$.
Notons (d) la droite d'équation $y=x+1$.
Lorsque $z=-2-\mathrm{i}$, Z n'est pas défini.
Or, on remarque que le point $A(-2;-1)$ appartient à (d).
Le lieu cherché est donc la droite (d) d'équation $y=x+1$ privée du point $A(-2;-1)$.

Exercice 6 (1,5 point)
Les nombres complexes $z_1=\left(1-\frac{3}{13}\mathrm{i}\right)\times(2+5\mathrm{i})$ et $z_2=\frac{7-\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ sont-ils conjugués ? Justifier.

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(1-\frac{3}{13}\mathrm{i}\right)\times(2+5\mathrm{i}) \\ &= \frac{(13-3\mathrm{i})(2+5\mathrm{i})}{13} \\ &= \frac{26+65\mathrm{i}-6\mathrm{i}+15}{13} \\ &= \frac{41+59\mathrm{i}}{13} \\ &= \frac{41}{13}+\frac{59}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{7-\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} \\ &= \frac{(7-\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{2^2+3^2} \\ &= \frac{14-21\mathrm{i}-2\mathrm{i}-3}{13} \\ &= \frac{11}{13}-\frac{23}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{z_1}=\frac{41}{13}-\frac{59}{13}\mathrm{i}$.
On a vu que $z_2=\frac{11}{13}-\frac{23}{13}\mathrm{i}$.
D'après l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $a+ib$ avec a et b réels, on peut affirmer que $\overline{z_1}\neq z_2$.
z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

Exercice 7 (Bonus - 2 points)

1. Déterminer la limite de la suite (V_n) définie par $V_n=n^2-\sqrt{n}$.
Pour $n\geqslant 1$, $V_n=\sqrt{n}(n\sqrt{n}-1)$.
$\lim \sqrt{n}=+\infty$.
$\lim n\sqrt{n}-1=+\infty$.
Donc par produit, $\lim V_n=+\infty$.

2. (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).
Indication : on pourra montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
Pour tout $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$\lim\sqrt{n+1}=+\infty$, et $\lim\sqrt{n}=+\infty$.
Par somme et quotient, $\lim u_n=0$.