NOM Prénom : .... Classe : ....

LYCÉE DE LA MER
Lundi 27 janvier 2020
DEVOIR COMMUN DE SECONDE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 2 heures

Instruments de géométrie et calculatrice autorisés. Formulaire interdit.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Ce sujet comporte 7exercices et est à remettre avec la copie.

Exercice 1 : *(6 points)*

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Aucune justification n'est attendue.
Pour chacune des parties A et B, entourez la bonne réponse.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte n'est pas pénalisée.

Partie A : En utilisant les courbes données en annexe, donner l'ensemble des solutions de chaque inéquation.

N°	Question	Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1	$x^2 < 4$	$[-2; 2]$	$]-2; 2[$	$]-\infty; 4[$	$]0; 4[$
2	$\frac{1}{x} \leq 2$	$[0,5; +\infty[$	$]-\infty; 2]$	$]-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup [0,5; +\infty[$
3	$-8 \leq x^3 \leq 1$	$[-2; 1]$	$\left]-\frac{1}{8}; 0\right[\cup]0; 1]$	$]-\infty; 1]$	$[-2; +\infty[$

Partie B :

Question 1 : Une population de bactéries cultivées en laboratoire augmente chaque jour de 20%. Le premier jour, on estimait à 10 milliers le nombre de bactéries. Au bout d'un jour, la population est de :

10 000,2	12 milliers	2 000	10 020

Question 2 : Effectuer une baisse de 13% revient à multiplier par :

0,13	1,13	0,87	- 0,13

Partie C :

Question 1 : L'équation $|x + 4| = -2$ admet pour solution :

$\{2; 6\}$	$\{-2; 6\}$	$\{-6; -2\}$	$\emptyset$

Question 2 :L'équation $|x + 2| \geq 2$ admet pour solution :

$[-4; 0]$	$[0; 4]$	$]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$	$]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

Exercice 2: *(5 points)*

1. Ecrire sous la forme $a\sqrt{7}$ où a est un nombre entier : $A = 5\sqrt{63} - 2\sqrt{175} + 3\sqrt{112} - 7\sqrt{28}$.

$A = 5\sqrt{63} - 2\sqrt{175} + 3\sqrt{112} - 7\sqrt{28}$ $A = 5\sqrt{9 \times 7} - 2\sqrt{25 \times 7} + 3\sqrt{16 \times 7} - 7\sqrt{4 \times 7}$ $A = 5\sqrt{9}\sqrt{7} - 2\sqrt{25}\sqrt{7} + 3\sqrt{16}\sqrt{7} - 7\sqrt{4}\sqrt{7}$ $A = 5 \times 3 \times \sqrt{7} - 2 \times 5 \times \sqrt{7} + 3 \times 4 \times \sqrt{7} - 7 \times 2 \times \sqrt{7}$ $A = 15 \times \sqrt{7} - 10 \times \sqrt{7} + 12 \times \sqrt{7} - 14 \times \sqrt{7}$ $A = 3 \times \sqrt{7}$

2. Ecrire sous la forme 2^n où n est un nombre entier : $B = \frac{8^3 \times 2^{-5}}{16^{-2}}$.

$B = \frac{(2^3)^3 \times 2^{-5}}{(2^4)^{-2}} = 2^{3\times3-5-4\times(-2)} = 2^{12}$

3. Ecrire sous la forme la plus simple possible : $C = \frac{2}{5} - \frac{15}{7} : \frac{20}{14}$.

$C = \frac{2}{5} - \frac{15}{7} : \frac{20}{14}$ $C = \frac{2}{5} - \frac{15}{7} \times \frac{14}{20}$ $C = \frac{2}{5} - \frac{3\times5\times2\times7}{7\times5\times2\times2}$ $C = \frac{2}{5} - \frac{3\times5}{5\times2}$ $C = \frac{2\times2}{5\times2} - \frac{3\times5}{5\times2}$ $C = \frac{4}{10} - \frac{15}{10}$ $C = -\frac{11}{10}$

(Pour chaque expression, on détaillera les étapes de calcul).

Exercice 3: *(4 points)*

Un téléphone nouvelle génération valait 800€ le 1er septembre. Il coûte 920€ le 1er novembre et au 1er février, il augmente de 5%.

1. Quel est le taux d'évolution du prix du téléphone entre le 1er septembre et le 1er novembre ?

Le taux d'évolution vérifie : $1 + \frac{t}{100} = \frac{920}{800}$ $1 + \frac{t}{100} = 1{,}15$ $\frac{t}{100} = 0{,}15$ $t = 15$ Le téléphone a augmenté de 15% entre le 1er septembre et le 1er novembre.

2. Quel est le pourcentage d'augmentation du téléphone entre le 1er septembre et le 1er février ?

Le prix du téléphone a augmenté de 15% puis de nouveau de 5%. Le taux d'augmentation global t vérifie : $1+\frac{t}{100}=(1+\frac{15}{100})(1+\frac{5}{100})$ $1+\frac{t}{100}=1{,}2075$ $t=20{,}75$ Le prix du téléphone a augmenté de 20,75% entre le 1er septembre et le 1er février.

3. Quel pourcentage de diminution faut-il appliquer au prix du 1er février pour retrouver le prix du 1er septembre ? Donner une valeur approchée à 0,1% près.

Le taux d'évolution réciproque vérifie : $1+\frac{t}{100}=\frac{1}{1+\frac{20{,}75}{100}}$ $1+\frac{t}{100}\approx 0{,}828$ $\frac{t}{100}\approx -0{,}172$ $t\approx -17{,}22$ Le taux de diminution à appliquer est 17,2%

<u>Exercice 4 :</u>*(7 points)*

Dans un repère orthonormé, on considère trois points :

$$A(-2\,;1), B(-1\,;4)\ et C(5\,;2)$$

1. Placer les points dans le repère ci-dessous. On complètera la figure au fur et à mesure.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point M milieu de [AC].

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}$ $x_M=\frac{-2+5}{2}$ $x_M=\frac{3}{2}$	$y_M=\frac{y_A+y_C}{2}$ $y_M=\frac{1+2}{2}$ $y_M=\frac{3}{2}$
$M(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$	

3. Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et AC.

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ $AB=\sqrt{(-1-(-2))^2+(4-1)^2}$ $AB=\sqrt{(-1+2)^2+(3)^2}$ $AB=\sqrt{1^2+3^2}$ $AB=\sqrt{10}$	$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$ $AC=\sqrt{(5-(-2))^2+(2-1)^2}$ $AC=\sqrt{(5+2)^2+(1)^2}$ $AC=\sqrt{7^2+1^2}$ $AC=\sqrt{50}$

4. On donne $BC = 2\sqrt{10}$. En déduire la nature du triangle ABC, justifier.

$AB^2 = 10$
$AC^2 = 50$
$BC^2 = (2\sqrt{10})^2 = 2^2 \times \sqrt{10}^2 = 4 \times 10 = 40$
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, *ABC* est rectangle en *B*.

5. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D.

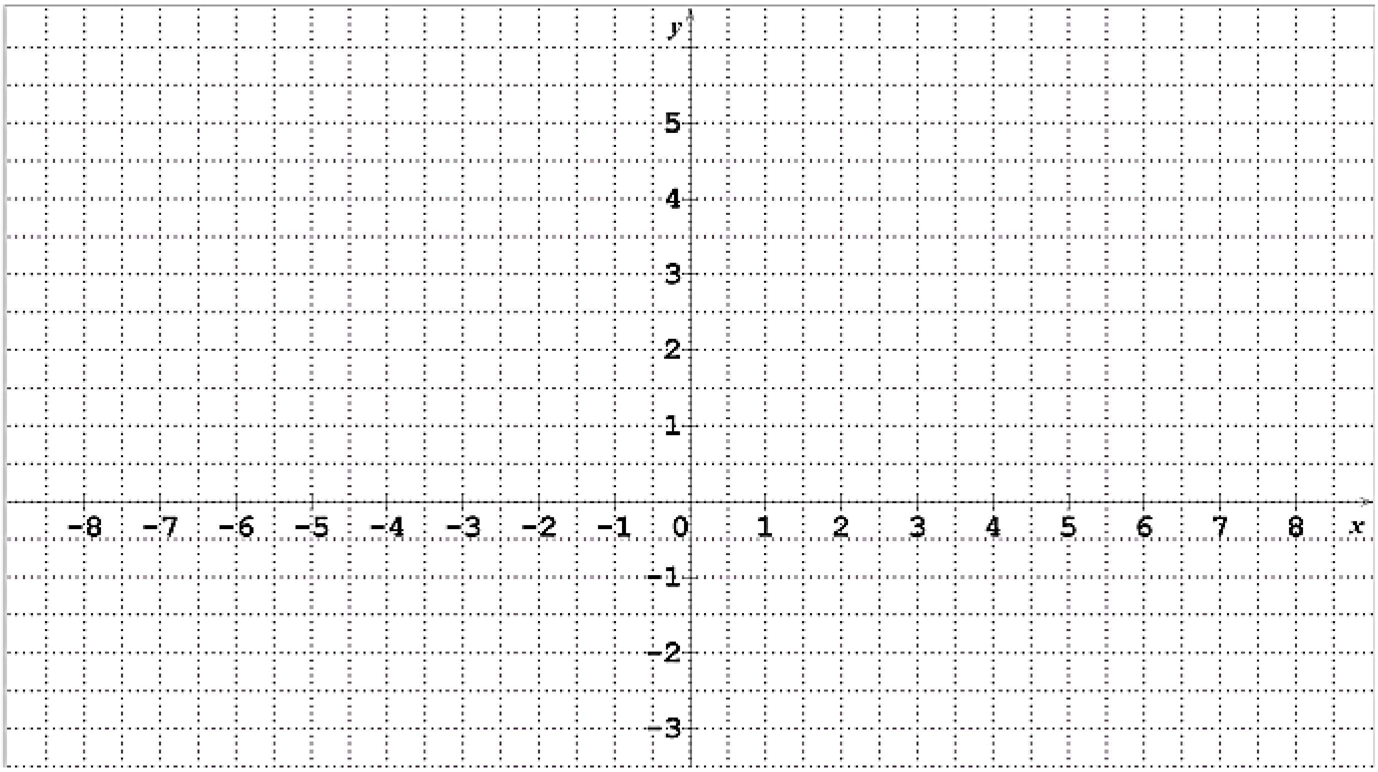
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 2-4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D-(-2) \\ y_D-1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D+2 \\ y_D-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x_D + 2 = 6 \; et \; y_D - 1 = -2$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow x_D = 4 \; et \; y_D = -1$
Donc $D(4\,;-1)$

6. Quelle est la nature précise du quadrilatère ABCD ? Justifier.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc *ABCD* est un parallélogramme.
Or, *ABC* est rectangle en *B* donc *ABCD* est un rectangle.



<u>Exercice 5 :</u> ***(9 points)***

Partie A :

Dans le repère ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur [-6 ; 2].

A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Quelles sont les images par *f* de -2 et de 0 ?

$f(-2) = 9$ $f(0) = 5$

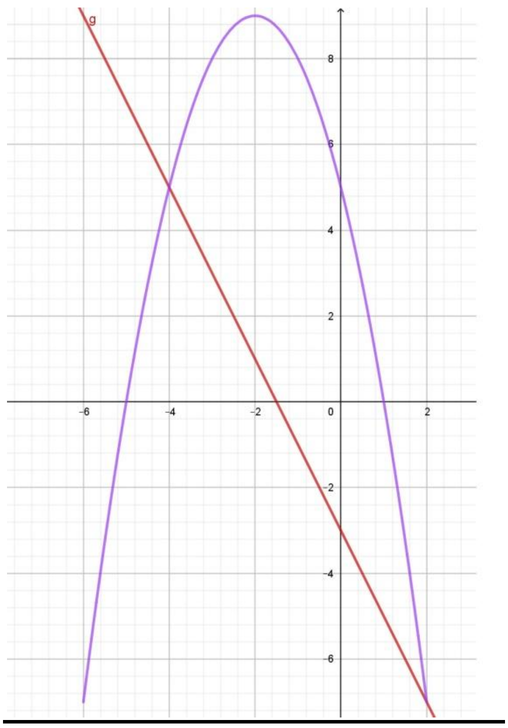
2) Le nombre 0 admet-il des antécédents par *f* ? Si oui, lesquels ?

0 admet deux antécédents par *f* : -5 et 1

3) Résoudre dans [-6 ; 2] l'inéquation *f*(*x*) < 5 en justifiant.

Les solutions de l'équation *f*(*x*) < 5sont les abscisses des points situés en dessous de la droite d'équation $y = 5$, donc $S =]-4\,;0[$

4) On considère la fonction g définie sur [-6 ; 2] par g(*x*) = - 2 *x* -3.
   a) Tracer la courbe de la fonction g dans le même repère que celle de *f*.



b) Résoudre dans [-6 ; 2] : *f*(*x*) ≥ g(*x*).

Les solutions de l'équation *f*(*x*) ≥ g(*x*) sont les abscisses des points de la courbe de *f* situés au-dessus de la courbe de *g*.

Donc $S = [-4\,;2]$

Partie B :

La fonction f de la partie A a pour expression $f(x) = 9 – (x + 2)^2$.

1) Factoriser $f(x)$.

$$f(x) = 9 - (x + 2)^2$$
$$f(x) = 3^2 - (x + 2)^2$$
$$f(x) = [3 - (x + 2)][3 + (x + 2)]$$
$$f(x) = (3 - x - 2)(3 + x + 2)$$
$$f(x) = (1 - x)(5 + x)$$

2) Développer et réduire $f(x)$

$$f(x) = (1 - x)(5 + x)$$
$$f(x) = 1 \times 5 + 1 \times x - x \times 5 - x \times x$$
$$f(x) = 5 + x - 5x - x^2$$
$$f(x) = 5 - 4x - x^2$$

Exercice 6: *(5 points)*

Une société de location de voitures propose à ses clients deux contrats :

- Contrat 1 : un forfait de 50 € et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Contrat 2 : 0,80 € par kilomètre parcouru.

On a défini ci-dessous la fonction Prix1.

```python
def Prix1(x):
    return (50+0.4*x)
```

1. Quelle est le rôle de cette fonction ? Que retourne Prix1(60) ?

Cette fonction calcule le prix à payer avec le contrat 1.
Prix1(60) retourne le prix à payer avec le contrat 1 pour 60 km parcourus, c'est-à-dire 74.

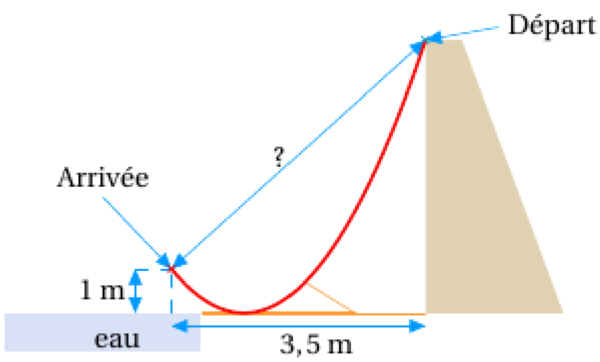
2. En vous inspirant de la fonction précédente, définir en Python, une fonction Prix2 qui renvoie le prix payé avec le contrat 2.

3. Compléter les lignes 8, 10 et 11, en Python, de la fonction Plusavantageux(x)qui indique le numéro du contrat le plus avantageux.

```python
1 def Prix1(x):
2     return (50+0.4*x)
3
4 def Prix2(x):
5     return (0.8*x)
6
7 def Plusavantageux(x):
8     if Prix1(x)<Prix2(x):
9         return("le contrat le plus avantageux est le contrat 1")
10    else:
11        return("le contrat le plus avantageux est le contrat 2")
```

Exercice 7: ***(4 points)***

En utilisant comme modèle la courbe de la fonction carré dessinée dans un repère orthonormé, on a représenté ci-contre le profil d'un toboggan pour une piscine.



1) A quelle hauteur se situe le point de départ ?
Expliquer votre raisonnement.

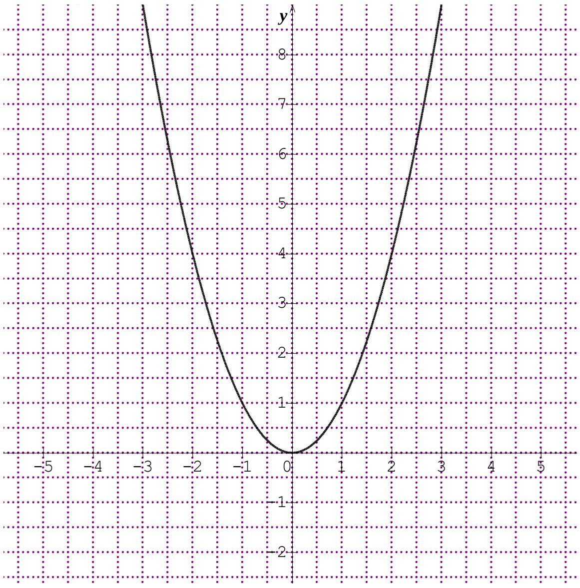
$x_D - x_A = 3{,}5$ d'où $x_D = 3{,}5 + x_A$
Puisque $y_A = 1$ et que $x_A < 0$, on en déduit que $x_A = -1$
Donc $x_D = 3{,}5 - 1 = 2{,}5$.
On en déduit que $y_D = 2{,}5^2 = 6{,}25$

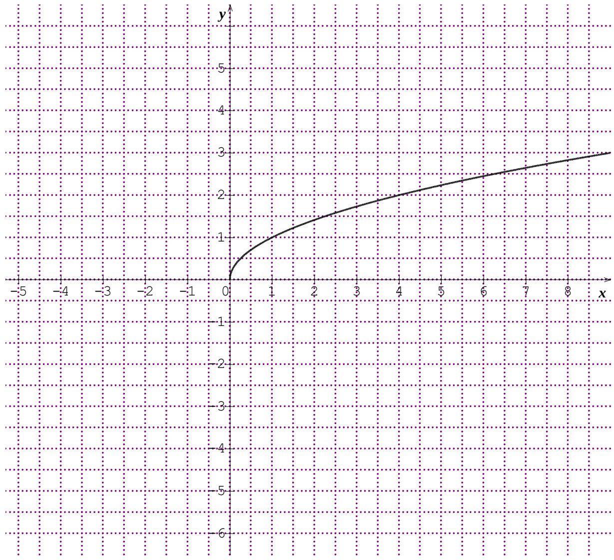
2) Quelle distance sépare le point d'arrivée du point de départ ? Expliquer votre raisonnement et donner cette distance au centième près.

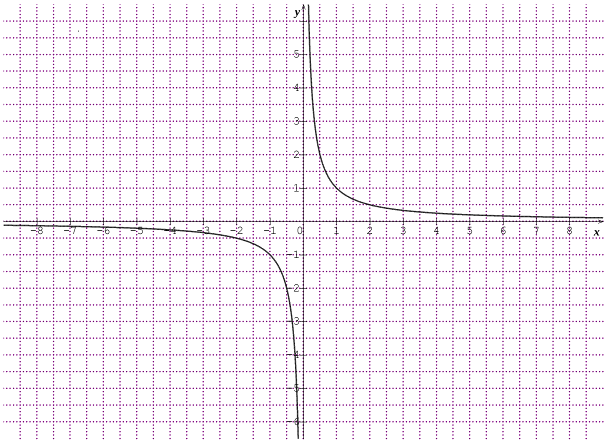
$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$
$AD = \sqrt{(2{,}5 - (-1))^2 + (6{,}25 - 1)^2}$
$AD = \sqrt{3{,}5^2 + 5{,}25^2}$
$AD = \sqrt{39{,}8125}$
$AD \approx 6{,}31\ m$

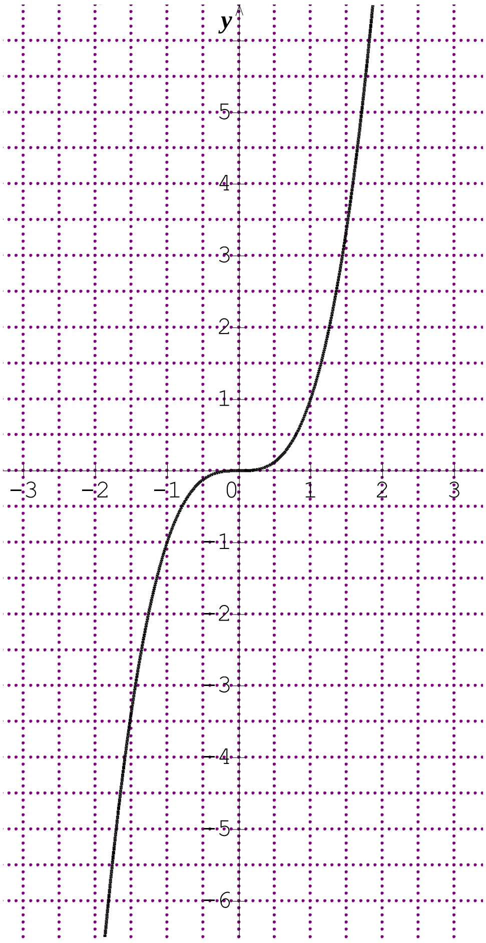
ANNEXE

<u>Exercice 1 :</u>









Corrigé pour nous !

Ex 6 :

```python
def Prix1(x):
    return (50+0.4*x)

def Prix2(x):
    return (0.8*x)

def Plusavantageux(x):
    if Prix1(x)<Prix2(x):
        return("le contrat le plus avantageux est le contrat 1")
    else:
        return("le contrat le plus avantageux est le contrat 2")
```

Ex 7 :

Dans un repère orthonormé, on appelle D le point de la courbe représentant la fonction f correspondant au point de départ et A celui correspondant au point d'arrivée.

On a donc $y_A = 1$. Cela signifie donc que $x_A = -1$ ou $x_A = 1$.

Le minimum de la fonction f étant atteint pour une abscisse plus grande que celle du point A, cela signifie donc que $x_A = -1$.

On sait que $x_D - x_A = 3,5$ par conséquent $x_D = 3,5 + x_A = 2,5$.

On en déduit donc que $y_D = 2{,}5^2 = 6,25$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(2,5-(-1))^2+(6,25-1)^2} \\ &= \sqrt{3{,}5^2+5{,}25^2} \\ &= \sqrt{39,812\,5} \\ &\approx 6,31\text{m} \end{aligned}$$