

NOM : 15/02/2024
Prénom :

BTS CRSA2. Interrogation de mathématiques n° 7

Exercice 1 (cours, 4 points)

- Soit X une variable suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - La fonction de densité est définie sur $[0; +\infty[$ par
 $f(x) = \dots\dots\dots$
 - L'espérance de X est $E(X) = \dots\dots\dots$
- Soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dots\dots\dots$
 - $E(X) = \dots\dots\dots$

Exercice 2

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

- Donner l'expression de la fonction de densité.
- Calculer les probabilités, arrondir à 0,001 près. Justifier.
 $P(1 \leq X \leq 3)$ $P(X \leq 6)$ $P(X > 4)$ $P(X = 3)$
- Déterminer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 3

Dans cet exercice les probabilités seront arrondies à 10^{-2} .

La durée de vie, exprimée en mois, d'un ordinateur portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On suppose que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 6 ans.

- Déterminer la valeur exacte du paramètre λ .
- Pour la suite, on prendra $\lambda = \frac{1}{72}$.
Calculer $P(X \leq 48)$. Interpréter.
- Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : "la durée de bon fonctionnement est supérieure à trois ans".

(b) B : "la durée de bon fonctionnement est comprise entre un an et trois ans".

- On suppose que l'ordinateur a bien fonctionné durant 4 ans. Calculer la probabilité qu'il fonctionne bien au moins 8 ans.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 1,8.

- Déterminer l'espérance de X .
- Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
 $P(X = 2)$ $P(X \leq 3)$ $P(X > 2)$

Exercice 5

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la probabilité qu'un bouchon, prélevé au hasard dans la production d'une journée, soit défectueux est 0,05.

On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons. Ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise. On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 80 bouchons, associe le nombre de bouchons défectueux dans cet échantillon.

- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
- Déterminer l'espérance mathématique de X .
- Justifier que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire X par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.
- On note Y la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
 - Calculer avec Y la probabilité qu'un tel prélèvement contienne exactement 10 bouchons défectueux.
 - Comparer avec $P(X = 10)$.

Rappels :

On peut approcher $\mathcal{B}(n; p)$ par une loi de Poisson si $[n \geq 30 ; p \leq 0,1 ; \text{ et } np \leq 10]$. Alors, on prend $\lambda = np$.