1re G. Correction du devoir maison n° 5

Exercice 1

Dans une rivière, une population de truites diminue de 20 % chaque année. En 2015, le nombre de truites est estimé à 200 truites par hectare. On décide d'introduire chaque année 200 truites.

1. Écrire un algorithme qui calcule et donne le nombre de truites par hectare au bout de n années.
   On note u_n le nombre de truites par hectare au bout de n années.
   On a donc $u_0 = 200$ et pour tout $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = u_n - \frac{20}{100}u_n + 200 = 0,8u_n + 200.$$

```
Entrer N
U prend la valeur 200
   Pour k allant de 1 à N
   U prend la valeur 0,8×U+200
   Fin Pour
Afficher U
```

Fonction Python associée :

```
def truite(n):
    U=200
    for k in range(1,n+1):
        U=0.8*U+200
    return(U)
```

2. Utiliser votre calculatrice pour donner le nombre de truites par hectares au bout de 10 ans, 30 ans, 50 ans.
   On obtient $u_{10} \approx 914$, $u_{30} \approx 999$, et $u_{50} \approx 1000$.
   Il devrait y avoir 914 truites par hectare au bout de 10 ans, 999 truites par hectare au bout de 30 ans, et 1000 truites par hectare au bout de 50 ans.

Exercice 2

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{k}$.

1. Écrire un algorithme qui calcule et renvoie T_n pour n donné en entrée.

```
Entrer N
T prend la valeur 0
      Pour k allant de 1 à N
      T prend la valeur T+k+1/k
      Fin Pour
Afficher T
```

Fonction Python associée :

```
def T(n):
    T=0
    for k in range(1,n+1):
        T=T+k+1/k
    return(T)
```

2. Le programmer et donner la valeur de T_{40} arrondie à 10^{-2}.
   $T_{40} \approx 824,28$.

Exercice 3

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros. Le 1er janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le mois précédent. On note $u_1 = 30$, et pour tout $n \geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2 = u_1 + 12 = 42$, et $u_3 = u_2 + 12 = 42 + 12 = 54$.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 12$.
   Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 12.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r = 30 + (n-1) \times 12$.
3. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
   $u_{12} = 30 + 11 \times 12 = 162$.
   Le 1er décembre 2015, il dépose la somme de 162 euros.
4. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2015.
   (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
   $$\begin{aligned} C_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\ &= \frac{[30 + 30 + (n-1) \times 12] \times n}{2} \\ &= \frac{(48 + 12n)n}{2} \\ &= (24 + 6n)n \\ &= 6n^2 + 24n \end{aligned}$$
   (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.
   On cherche le plus petit entier n tel que $C_n \geqslant 1500$.
   On résout l'inéquation $6x^2 + 24x - 1500 \geqslant 0$.
   En simplifiant par 6, $x^2 + 4x - 250 \geqslant 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1016$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots \approx -17,93$.
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots \approx 13,93$.
   Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 250$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le plus petit entier naturel n pour lequel $6n^2 + 24n \geqslant 1500$ est donc $n = 14$.
Le mois d'indice 14 est le mois de février 2016.
Il pourra acheter la guitare en février 2016.