NOM : 22/11/2022
Prénom :

1re G . Devoir de mathématiques n° 3
Sujet 1

Exercice 1 (1 point)
Donner la définition de la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$.

Exercice 2 (5 points)
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
— La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Déterminer $P(T)$. Justifier.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Exercice 3 (4 points)
On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 70% des messages reçus sont des spams
- 95% des spams sont éliminés
- 2% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (sans justifier) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés			
Messages conservés			
Total			1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.
   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.
   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   (c) Le logiciel se trompe s'il conserve un spam ou s'il élimine un message bienvenu. Quelle est la probabilité de l'événement A : « le logiciel se trompe » ?

Exercice 4 (3 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$.
   Calculer a_0, a_1 et a_2.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1$.
   Calculer b_1 et b_2.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - n^2 + 3$.
   Calculer c_1 et c_2.

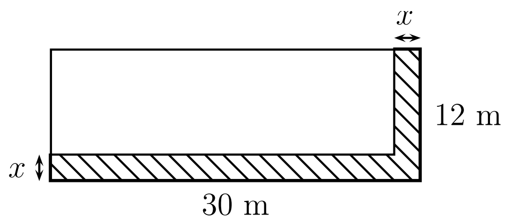
Exercice 5 (1,5 point)
On place un capital de 15 000 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 3,5 % d'intérêts composés. On suppose que l'on dépose 600 euros chaque début d'année à partir de la deuxième année.
On pose $C_0 = 15\,000$ et l'on note C_n le capital présent au bout de la n-ième année après le dépôt de 600 euros.

1. Calculer C_1, capital au bout d'un an après le dépôt de 600 euros.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

Exercice 6 (2,5 points)
On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 100$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3V_n - 20$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de V_{10}.
2. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de V_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 7 (3 points)
Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. On souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2.
   Montrer que cela se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$.
2. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Exercice 8 (bonus, 1 point)
Déterminer une fonction du second degré à coefficients entiers dont le nombre $2 - \sqrt{5}$ est racine.

NOM : Jeudi 15/10/2020
Prénom :

1re G. Devoir de mathématiques n° 2
Sujet 2

Exercice 9 (1 point)
Énoncer la formule des probabilités totales associée à une partition A_1, A_2, $\ldots$, A_n de l'univers.

Exercice 10 (5 points)
Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 6 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,98$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,99$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Déterminer la probabilité que le test soit positif.
3. (a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Exercice 11 (4 points)
On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :
- 75% des messages reçus sont des spams
- 96% des spams sont éliminés
- 4% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (aucune justification n'est attendue) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés			
Messages conservés			
Total			1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.
   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.
   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   (c) Le logiciel se trompe s'il conserve un spam ou s'il élimine un message bienvenu. Quelle est la probabilité de l'événement A : « le logiciel se trompe » ?

Exercice 12 (3 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right)^2$.
   Calculer a_0, a_1 et a_2.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n - 1$.
   Calculer b_1 et b_2.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = n^2 + 3c_n$.
   Calculer c_1 et c_2.

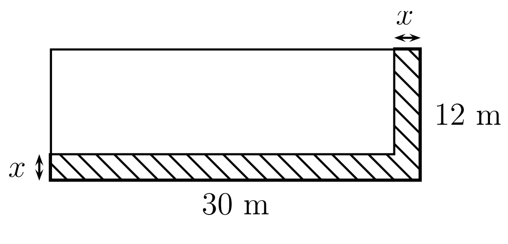
Exercice 13 (1,5 point)
On place un capital de 15 000 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 2 % d'intérêts composés. On suppose que l'on retire 700 euros chaque début d'année à partir de la deuxième année.
On pose $C_0 = 15\,000$ et l'on note C_n le capital présent au bout de la n-ième année après le retrait de 700 euros.

1. Calculer C_1, capital au bout d'un an après le retrait de 700 euros.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.

Exercice 14 (2,5 points)
On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 30$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = -2V_n + 12$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de V_{10}.
2. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de V_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 15 (3 points)
Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. On souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2.
   Montrer que cela se traduit par l'inéquation
   $$x^2 - 42x + 80 \geqslant 0.$$
2. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Exercice 16 (bonus, 1 point)
Déterminer une fonction du second degré à coefficients entiers et dont le nombre $2 - \sqrt{5}$ est racine.