Chapitre 10 : Primitives

I Primitives d'une fonction continue

Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est f.
Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 1
On pose $A(x) = -3x^2 + x$, $B(x) = -3x^2$, $C(x) = -3x^2 + 1$, $D(x) = -x^3$, $E(x) = -6$.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = -6x$. Reconnaître des primitives de f parmi les fonctions A, B, c, D, E.
2. Donner une primitive des fonctions suivantes :
   (a) $u(x) = 8$
   (b) $v(x) = 3x^2$
   (c) $w(x) = x^2$

Théorème (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies par $G(x) = F(x) + k$, où k est une constante.
2. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration

1. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f car c'est bien une fonction dérivable sur I (par somme de fonctions dérivables), et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.
   Réciproquement, soit G une autre primitive de f.
   Alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.
   Donc la fonction $(G - F)$ est constante sur l'intervalle I, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.
2. Soit $G(x) = F(x) + k$ une primitive de f sur I.
   Pour que $G(x_0) = y_0$, il faut et il suffit que $F(x_0) + k = y_0$, ce qui détermine une unique valeur pour la constante k ($k = y_0 - F(x_0)$).
   Donc il existe une unique primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$. □

II Recherche de primitives

II.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier différent de 0 et -1	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$

II.2 Opérations sur les primitives

Propriété
Soient f et g deux fonctions continues sur I, de primitives respectives F et G.

1. Une primitive de $f + g$ est $F + G$.
2. Pour toute constante $k \in \mathbb{R}$, une primitive de kf est kF.

Démonstration

1. $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
2. $(kF)' = kF' = kf$.

$\square$

Remarque
Attention, $F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$ car $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$.

Propriété (composée)
Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Avec $n \geqslant 1$, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.
2. Pour $n < -1$ et avec u ne s'annulant pas sur I, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.
3. Si $u(x) > 0$ sur I, une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Démonstration

1. $\left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \times (n+1)u^n u' = u'u^n$.
2. Idem.
3. $(2\sqrt{u})' = 2 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$.

$\square$