1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°1

Exercice 1 (98 p233)

Dans le triangle CDE, avecles notations de la formule d'Al-Kashi, on a $e = CD = 6$, $d = CE = 4$, et $c = ED = 5$.

Déterminons d'angle $\widehat{C}$.

D'après la formule d'Al-Kashi, $c^2 = d^2 + e^2 - 2ed\cos\widehat{C}$,

soit $\cos\widehat{C} = \dfrac{d^2+e^2-c^2}{2ed} = \dfrac{16+36-25}{2\times 6\times 4} = \dfrac{27}{48} = \dfrac{9}{16}$.

À la calculatrice, $\arccos(\dfrac{9}{16}) \approx 55,77$. $\boxed{\text{Donc, au degré près, } \widehat{C} \approx 56°.}$

Déterminons de même l'angle $\widehat{D}$.

D'après la formule d'Al-Kashi, $d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos\widehat{D}$,

soit $\cos\widehat{D} = \dfrac{c^2+e^2-d^2}{2ec} = \dfrac{25+36-16}{2\times 6\times 5} = \dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4}$.

À la calculatrice, $\arccos(\dfrac{3}{4}) \approx 41,41$. $\boxed{\text{Donc, au degré près, } \widehat{D} \approx 41°.}$

Enfin, par somme des angles du triangle,

$\widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180$, donc $\widehat{E} = 180 - (\widehat{C} + \widehat{D}) \approx 180 - (56+41) = 180 - 97 = 83$. $\boxed{\widehat{E} \approx 83°}$.

Exercice 2 (137 page 236)

1. Calcul de CD.

   D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle BCD, $b^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\widehat{B})$.

   $b^2 = 16 + 25 - 2\times 4\times 5\cos(60°) = 41 - 40 \times \dfrac{1}{2} = 41 - 20 = 21$.

   $\boxed{\text{Donc } b = CD = \sqrt{21} \text{ (environ 4,6).}}$

2. Mesures des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BDC}$.

   D'après la formule d'Al-Kashi dnas le triangle BCD, $c^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\widehat{C}$.

   Donc $\cos\widehat{C} = \dfrac{b^2+d^2-c^2}{2bd} = \dfrac{21+25-16}{2\times 5\times\sqrt{21}} = \dfrac{30}{10\sqrt{21}} = \dfrac{3}{\sqrt{21}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{21}$.

   À la calculatrice, $\arccos(\dfrac{2}{\sqrt{11}}) \approx 49,11$. $\boxed{\text{Donc, au degré près, } \widehat{C} \approx 49°.}$

   Par somme des angles du triangle BCD,

   $\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180$, donc $\widehat{D} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 180 - (60+49) = 180 - 109 = 71$.

   $\boxed{\widehat{D} \approx 71°}$.

3. Mesures des angles $\widehat{CBE}$ et $\widehat{BEC}$.

   On a, d'après l'énoncé, $\widehat{CBE} + \widehat{CBD} = \widehat{EBD} = 90$, donc $\widehat{CBE} = 90 - \widehat{CBD} = 90 - 60 = 30$.

   $\boxed{\widehat{CBE} = 30°.}$

   Par somme des angles dans BEC, $\boxed{\widehat{E} = 180 - 30 - 30 = 120.}$

4. Longueur BE.

   On observe que le triangle BEC est isocèle en E puisque les angles à la base mesurent à 30°.

   Donc $EB = EC$.

   D'après la formule d'Al-Kashi dans BEC, $e^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\widehat{E}$, or $EB = EC$, soit $b = c$ dans la formule précédente.

   $25 = 2b^2 + 2b^2\cos(120)$, donc $b^2\left(2 + 2\times\dfrac{-1}{2}\right) = 25$, donc $b^2 = \dfrac{25}{3}$,

   et $b = \sqrt{\dfrac{25}{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

$\boxed{\text{Comme } c = b,\ BE = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \text{ (environ 2,9).}}$

Méthode 2 : avec la formule des sinus (donnée en complément dans le cours).

$$\frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{e}{\sin\widehat{E}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}}$$

$\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{e}{\sin\widehat{E}}$ donne $c = e \times \dfrac{\sin\widehat{C}}{\sin E} = 5 \times \dfrac{\sin 30}{\sin 120} = 5 \times \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{BE = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}}$

Exercice 3 (112 page 234)

1. $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
   D'après la formule du produit scalaire avec les normes (utilisant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$), il vient
   $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}||^2 - ||\overrightarrow{DA}||^2 - ||\overrightarrow{DC}||^2) = \frac{1}{2}(DB^2 - DA^2 - DC^2)$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est vraie.}}$
2. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
   $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2 - (||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2)$
   $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = -4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

Exercice 4 (114 page 235)

1. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :
   $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2 + (||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2) = 2(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2)$.
2. Soit $ABCD$ un parallélogramme.
   En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, on a
   $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
   et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.
   En appliquant le résultat de la question 1,
   $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = 2(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2)$,
   il vient donc $AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.
3. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 9$.
   Calculons BD.
   D'après 2, $AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, soit $81 + DB^2 = 2(49 + 25)$.
   $\boxed{\text{Donc } BD^2 = 67,\ BD = \sqrt{67}.}$

Exercice 5 (126 page 235)

1. $M(1; 8)$, $N(0; 2)$ et $P(-5; 9)$.
   D'après une propriété du cours,
   M appartient au cercle de diamètre $[NP]$ ssi $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.
   $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_N \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$, et de même $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = xx' + yy' = -1 \times (-6) + (-6) \times 1 = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } M \text{ appartient au cercle de diamètre } [NP]. \text{ Vrai}}$
2. $A(4; 2)$, $B(0; -2)$, $C(2; \sqrt{8})$.
   C appartient au cercle de dismètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ 2-\sqrt{8} \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -2 \\ -2-\sqrt{8} \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = xx'+yy' = 2\times(-2)+(2-\sqrt{8})(-2-\sqrt{8}) = -4-4-2\sqrt{8}+2\sqrt{8}+8 = 0.$

$\boxed{\text{Donc } C \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB]. \text{ Vrai}}$

Exercice 6 (14 page 254)

1. La droite d est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1;3)$.
   $\overrightarrow{n}(3;-1)$ est normal à d s'il est non nul et orthogonal à un vecteur directeur de d.
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = xx'+yy' = 3\times 1+(-1)\times 3 = 0.$
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal à } d.}$
2. Tout vecteur non nul et colinéaire à $\overrightarrow{n}$ est encore un vecteur normal à d.
   $\boxed{\text{Par exemple, } 6\overrightarrow{n}(18;-6) \text{ et } -2\overrightarrow{n}(-6;2) \text{ sont aussi des vecteurs normaux à la droite } d.}$

Exercice 7 (15 page 254)

On donne $A(2;3)$ et $B(-2;8)$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est bien sûr un vecteur directeur de la droite (AB).
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$. $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dirige la droite } (AB).}$
2. Vérifions que $\overrightarrow{n}(5;4)$ est normal à la droite (AB).
   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = xx'+yy' = 5\times(-4)+4\times 5 = 0.$
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}, \text{ et } \overrightarrow{n}(5;4) \text{ est bien un vecteur normal à la droite } (AB).}$

Exercice 8 (16 page 254)

La droite d a pour équation $4x-3y+11=0$.

1. Par propriété du cours, la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(a;b)$.
   $\boxed{\text{Ici, le vecteur } \overrightarrow{n}(4;-3) \text{ est normal à } d.}$
2. Donnons une équation d'une autre droite ayant le même vecteur normal.
   On utilise la propriété réciproque :
   Si $\overrightarrow{n}(a;b)$ est un vecteur normal à la droite d, alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$.
   $\boxed{\text{Par exemple, la droite } d_2 \text{ d'équation } 4x-3y+1=0 \text{ a elle aussi } \overrightarrow{n}(4;-3) \text{ pour vecteur normal.}}$

Exercice 9 (17 page 254)

Donnons une équation de droite dont $\overrightarrow{n}(8;-5)$ est un vecteur normal.

$\boxed{8x-5y=0 \text{ convient par exemple.}}$

Exercice 10 (18 page 254)

Soit d une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2;-1)$.

1. c. $\overrightarrow{c}(1;2)$ n'est pas normal à d car c'est le seul qui ne soit pas colinéaire avec $\overrightarrow{n}$.
   On le voit car les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, ou avec le critère de colinéarité vu en seconde : $xy'-yx' = 2\times 2-(-1)\times 1 = 5 \neq 0$ donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{c}$ ne sont pas colinéaires.
2. b. L'équation $x+2y=0$ ne peut pas être une équation de la droite d car cette équation est celle d'une droite de vecteur normal $(1;2)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}(2;-1)$.

Exercice 11 (36 page 256)
Déterminons une équation de la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. $A(3;8)$ et $\overrightarrow{n}(7;-1)$.
   Méthode 1
   Par propriété, comme $\overrightarrow{n}(7;-1)$ est normal à d, d a une équation de la forme $7x - y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$ qui reste à déterminer.
   Comme $A(3;8) \in d$, on a $7 \times 3 - 8 + c = 0$, soit $c = -13$.
   $\boxed{d \text{ a pour équation } 7x - y - 13 = 0.}$
   Méthode 2
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   $M \in d$ ssi $\overrightarrow{AM}(x-3;y-8)$ et $\overrightarrow{n}(7;-1)$ sont orthogonaux.
   $M \in d$ ssi $7(x-3) - (y-8) = 0$
   $M \in d$ ssi $7x - y - 13 = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } d \text{ a pour équation } 7x - y - 13 = 0.}$
2. $A(-2;0)$ et $\overrightarrow{n}(-2;3)$.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   $M \in d$ ssi $\overrightarrow{AM}(x+2;y)$ et $\overrightarrow{n}(-2;3)$ sont orthogonaux.
   $M \in d$ ssi $-2(x+2) + 3y = 0$
   $M \in d$ ssi $-2x + 3y - 4 = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } d \text{ a pour équation } -2x + 3y - 4 = 0.}$

Exercice 12 (39 page 256)
On donne $A(-1;3)$, $B(5;1$ et $C(2;-1)$. Soit d la perpendiculaire à (AB) passant par C (autrement dit, d est la hauteur issue de C dans le triangle ABC).

1. Donnons un vecteur normal d.
   Comme $d \perp (AB)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à d.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A), \text{ donc } \overrightarrow{AB}(6;-2) \text{ est normal à } d.}$
   Remarque : tout vecteur non nul colinéaire à ce vecteur convient, on peut donc donner aussi le vecteur de coordonnées $(3;-1)$.
2. Déterminons une équation de d.
   d est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(6;-2)$ et passant par $C(2;-1)$.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   $M \in d$ ssi $\overrightarrow{CM}(x-2;y+1)$ et $\overrightarrow{AB}(6;-2)$ sont orthogonaux.
   $M \in d$ ssi $6(x-2) - 2(y+1) = 0$
   $M \in d$ ssi $6x - 2y - 14 = 0$.
   $M \in d$ ssi $3x - y - 7 = 0$.
   Donc d a pour équation $3x - y - 7 = 0$.
   $\boxed{\text{La hauteur issue de } C \text{ a pour équation } 3x - y - 7 = 0\text{, ou encore, si l'on préfère l'équation réduite, } y = 3x - 7.}$