BTS - Nombres complexes

Programme :
Nombres complexes : Forme algébrique, addition, multiplication, conjugué. On se limite à la forme algébrique.
Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.

I Un peu d'histoire

L'utilisation des nombres complexes provient des équations du 3^{e} et 4^{e} degré pour permettre leur résolution. Au XVI^{e} siècle, Bombelli les appelle impossible. En 1637, Descartes les appelle imaginaire. C'est avec Euler, en 1777, que pour la première fois, les imaginaires restent dans le calcul.

II Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition (et théorème)
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans $\mathbb{C}$.
3. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
4. Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels.

Définition
L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la partie imaginaire de z, elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque

1. Lorsque $b = 0$, z est un nombre réel.
2. Lorsque $a = 0$, ont dit que z est imaginaire pur.

Exemple :
Soit $z = 3 - 8\mathrm{i}$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 3$, et $\mathrm{Im}(z) = -8$.
Le nombre 3i est imaginaire pur.

Exercice 1
On considère les nombres complexes $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 5 + \mathrm{i}$.
Calculer et mettre sous forme algébrique

1. $A = z_1 + z_2$, $B = z_1 - z_2$, $C = 5z_1 - 2z_2$
2. $D = z_1 \times z_2$, $E = (z_1)^2$, et $F = (z_2)^2$.
3. $G = 3i^2$; $H = 5i^3 + 11i^4$

4. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2
Montrer que pour tous réels a et b, $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.

Remarque
Pour l'écriture algébrique d'un nombre complexe, on ne laisse pas de i au dénominateur.
Si le dénominateur est $(a+\mathrm{i}b)$, on multiplie au numérateur et au dénominateur par son conjugué $(a-\mathrm{i}b)$.
Le dénominateur devient $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.

Exercice 3
Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

Propriété (égalité de deux nombres complexes)
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
Autrement dit, si $z = a+\mathrm{i}b$ et $z' = a'+\mathrm{i}b'$ avec a, b, a', b' réels, alors

$$z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$

III Conjugué d'un nombre complexe

Définition
Soit $z = a+\mathrm{i}b$, avec a, b réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a-\mathrm{i}b$.

Exemple :
$\overline{3+5\mathrm{i}} = 3-5\mathrm{i}$.

Remarque
1. $\bar{\bar{z}} = z$.
2. $z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

Propriété
Soient z et z' deux nombres complexes.
1. $\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}$.
2. $\overline{z\times z'} = \bar{z}\times\bar{z'}$.
3. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.
4. $z\bar{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.

Démonstration
1. $\overline{(a+\mathrm{i}b)+(a'+\mathrm{i}b')} = \overline{(a+a')+\mathrm{i}(b+b)} = a+a'-\mathrm{i}(b+b') = (a-\mathrm{i}b)+(a'-\mathrm{i}b') = \bar{z}+\bar{z'}$.
2. On procède de même en passant aux formes algébriques.

3. On raisonne par récurrence.
4. On procède comme pour 1.
5. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe sous forme algébrique (a et b réels).
   $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b = 0$.
   Or, $z = \bar{z}$ si et seulement si $a + \mathrm{i}b = a - \mathrm{i}b$, ce qui équivaut à $b = 0$.
   On a vu que deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
6. z est imaginaire pur si et seulement si $a = 0$. □

IV Équation du second degré à coefficients réels

Propriété
Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels, $a \neq 0$.
Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles) :
$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Remarque
On a toujours la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ (avec dans le cas de la racine double, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$).

Démonstration
On montre le résultat du 3. Les points 1. et 2. ont été vus en première.
On part de la forme canonique, $P(z) = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$, et l'on peut écrire $-\Delta = (\sqrt{-\Delta})^2$.
Ainsi, $\Delta = -(\sqrt{-\Delta})^2 = \mathrm{i}^2\sqrt{-\Delta}^2 = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
On peut alors factoriser le polynôme $P(z)$ via une identité remarquable à l'aide de facteurs complexes :

$$\begin{aligned}
P(z) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(z + \frac{b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$. $\square$

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes.

1. $5z^2 - 4z - 1 = 0$
2. $4z^2 - 4z + 1 = 0$
3. $2z^2 + 2z + 1 = 0$

Exercice 5 (calcul mental)
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 = -9$
2. $z^2 - 1 = 0$
3. $z^2 + \dfrac{1}{4} = 0.$
4. $(z^2 - 5)(z^2 + 36) = 0.$
5. $\bar{z} + 5 - \mathrm{i} = 0.$