T8. Correction du dm4.
Nombres complexes.

Exercice 1 (n° 58 page 212 du livre)
Soit $z = x + iy$ avec x et y réels, on pose $Z = \dfrac{Z-2}{Z-i}$, avec $z \neq i$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x-2+iy}{x+(y-1)i} \\ &= \frac{[(x-2)+iy]\times[x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{[(x-2)x+y(y-1)]+i[xy-(x-2)(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-2x+y^2-y)+i(x+2y-2)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x+2y-2}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Déterminer puis construire l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que

(a) Z soit réel.
Soit $z = x + iy$, $z \neq i$.
Z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2=0 \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases} \end{aligned}$$

Notons d la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
Z est défini lorsque $z \neq i$, ce qui veut dire que l'on doit exclure le point $J(0;1)$ du lieu obtenu (on remarque que $J \in d$).

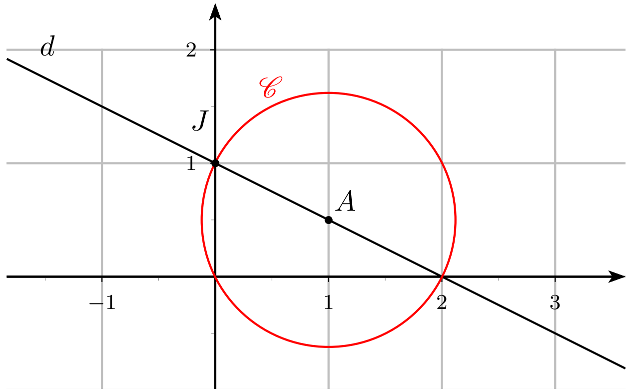
L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$ est donc la droite d d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ privée du point $J(0;1)$.

(b) Z soit imaginaire pur.
Z est imaginaire pur ssi sa partie réelle est nulle.

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2-y=0 \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4} \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ est l'équation du cercle de centre $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Notons $\mathscr{C}$ ce cercle.
On remarque que le point $J(0;1)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$ est donc le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $J(0;1)$.



Rappel : dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$