Samedi 19 mai 2018

Contrôle commun de mathématiques n° 4

Exercice 1 (8 points)
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, B$(1\,;2\,;4)$ et C$(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$.
   (c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$, arrondie au degré.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
   (a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
   (b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   (c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & t \end{array}\right.$$

   Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2 (3 points)
Soit $\lambda > 0$. On rappelle que la fonction de densité associée à la loi exponentielle de paramètre λ est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

1. Démontrer le résultat suivant :

$$\text{Pour tout } a > 0,\ P(X < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

2. En déduire, pour tout $a > 0$, l'expression de $P(X > a)$ en fonction de a.

Exercice 3 (5 points)
La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil électroménager avant sa première panne est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Une étude statistique montre qu'environ 22% des appareils tombent en panne avant la fin de la deuxième année.
On pourra arrondir les résultats à 10^{-2} près.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Pour la suite de l'exercice, on prend $\lambda = 0,12$. Quelle est la durée de vie moyenne de ces appareils ?
3. Calculer la probabilité qu'un appareil fonctionne entre 5 et 15 ans.
4. Au bout de quelle durée aura-t-on 10 % des appareils en panne ?
5. Montrer que la probabilité qu'un appareil fonctionne correctement pendant au moins 13 ans est d'environ 0,21 (en arrondissant à 10^{-2}).
6. On considère que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.
   (a) Un magasin a acheté 10 de ces appareils. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un de ces appareils ait une durée de vie supérieure à 13 ans ?
   (b) **Question bonus (1 point)**
   Déterminer le nombre minimal d'appareils que le magasin doit acheter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne correctement pendant plus de 13 ans soit supérieure à 0,999.

Exercice 4 (1,5 point)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On arrondira les résultats à 10^{-3}.

1. Calculer $P(-3 < X < 0,4)$. Aucune justification n'est attendue.
2. Calculer $P(X < -0,6)$. Aucune justification n'est attendue.
3. Donner le réel c tel que $P(X < c) = 0,64$. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 5 (2,5 points)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   « Quel que soit le réel strictement positif t, $P(X \leqslant t) + P(X \leqslant -t) = 1$. »
2. (a) Démontrer que pour tout réel $a > 0$, $P(-a < X < a) = 2P(X < a) - 1$.
   (b) En déduire le réel a tel que $P(-a < X < a) = 0,88$. Justifier.

CORRECTION

corrigé exercice 1

1. (a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC).

   (b) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + 0\times(-1) + 4\times 1 = 4$,

   (c) D'autre part :

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{2^2+0^2+4^2}\times\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\times\cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{40}$ co

   On en déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{\sqrt{40}}$. À l'aide de la calculatrice : $\widehat{BAC}\approx$ 50,8 degré.

2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une base du plan (ABC). De plus
   - $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2 + (-1)\times 0 + (-1)\times 4 = 4-4 = 0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + (-1)\times(-1) + (-1)\times 1 = 1-1 = 0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AC}$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   (b) Une équation cartésienne de (ABC) est alors de la forme $2x-y-z+d=0$. Le point $A(-1;2;0)$ appartient à ce plan donc $-2-2=d=0$ d'où $d=4$. Une équation cartésienne de (ABC) est donc $2x-y-z+4=0$.

3. (a) Un vecteur directeur du plan d'équation $x-2z+6=0$ est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Ce vecteur est également un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$ puisque ces deux plans sont parallèles. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est donc : $x-2z+d=0$. Et comme $O(0;0;0)\in\mathcal{P}_2$ cela conduit à $d=0$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est donc $x-2z=0\iff x=2z$.

   (b) Le plan $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n_2}$, par conséquent les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont ni parallèles ni confondus : ils sont sécants.

   (c)
   - Pour tout réel t, on a $3(2t)+(-4t-3)-2t+3 = 6t-4t-3-2t+3 = 0$ donc la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}_1$.
   - Pour tout réel t, on a $(2t)-2(t)=0$, donc la droite $\mathcal{D}$ et incluse dans le plan $\mathcal{P}_2$.

   Ces deux plans étant sécants selon une droite, cette droite n'est autre que la droite $\mathcal{D}$.

4. Soit M un point de $\mathcal{D}$, alors il existe un réel t tel que $M(2t;-4t-3;t)$. D'où :

   $$M\in(ABC)\iff 2(2t)-(-4t-3)-t+4=0\iff 7t+7=0\iff t=-1$$

   La droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) n'ont donc qu'un seul point commun, obtenu pour $t=-1$, c'est le point $I(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.