Lois de probabilité continues 1
Rappels – Loi uniforme – Loi normale

I Rappels de probabilités

I.1 Probabilité conditionnelle, indépendance

Définition (probabilité conditionnelle)
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété
Pour tous événements A et B avec $P(A) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

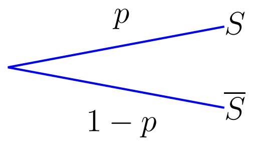
Propriété (formule des probabilités totales)
Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

Propriété (indépendance)
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).
A et B sont indépendants ssi $P_B(A) = P(A)$ ssi $P_A(B) = P(B)$ ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

I.2 Loi binomiale

Définition
Une « épreuve de Bernoulli » est une expérience à deux issues, succès ou échec.
On note S le succès et p sa probabilité : $P(S) = p$.
L'autre issue est alors $\overline{S}$ et $P(\overline{S}) = 1 - p$.



Définition
Soient n un entier $n \geqslant 1$ et $p \in]0;1[$.
On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
Soit X la fonction qui à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus.
On dit alors que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On note $\mathscr{B}(n;p)$ cette loi.

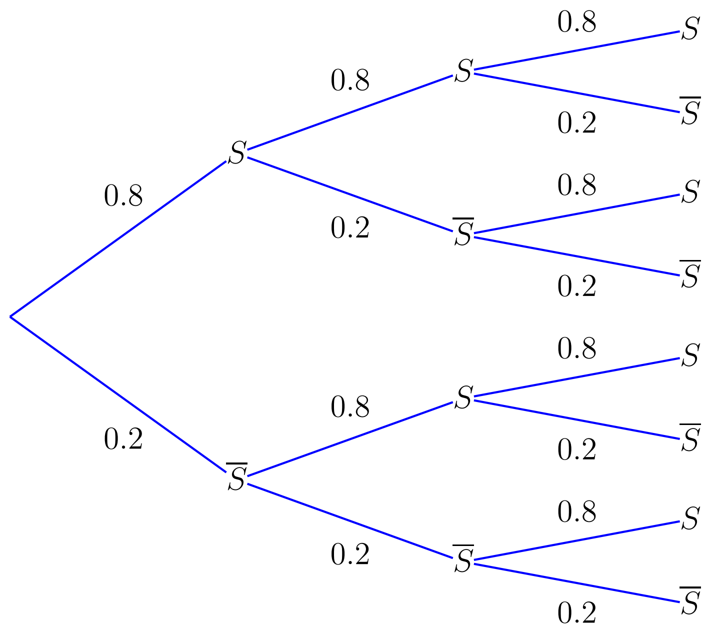
Propriété
Soit X une variable suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ où $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (lire « k parmi n »).

Théorème (admis)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors,

1. L'espérance de X est $E(X)=np$,
2. La variance de X est $V(X)=np(1-p)$,
3. L'écart-type de X est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exercice 1
Un archer tire successivement 3 flèches. La probabilité qu'il touche sa cible (S) est de 0.8.
On a donc $n=3$ et $p=0.8$.
L'expérience peut se représenter par l'arbre suivant :



On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'archer touche la cible sur les 3 tentatives.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
3. Décrire l'événement $(X=3)$ et calculer sa probabilité.
4. Décrire l'événement $(X=1)$ et calculer sa probabilité.
5. Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.

Utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	Opt Stat Dist Binomial	distrib	Outils Proba Lois Binomiale
$P(X=k)$	`BinomialPD(k,n,p)`	`binomFdP(n,p,k)`	`binompdf(k,n,p)`
$P(X \leqslant k)$	`BinomialCD(k,n,p)`	`binomFRep(n,p,k)`	`binomcdf(k,n,p)`

II Lois continues

Jusqu'à présent, on a toujours rencontré des variables aléatoires qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (variables discrètes).

On dit qu'une variable aléatoire est continue lorsque l'ensemble des valeurs possibles est tout un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple :
On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;1]$.
La variable aléatoire X correspondant au nombre obtenu est continue. Les valeurs possibles pour X sont tous les réels de $[0;1]$.

Définition

1. On appelle fonction de densité de probabilité sur l'intervalle I toute fonction définie sur I, continue et positive sur I, et telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
2. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est la fonction f.

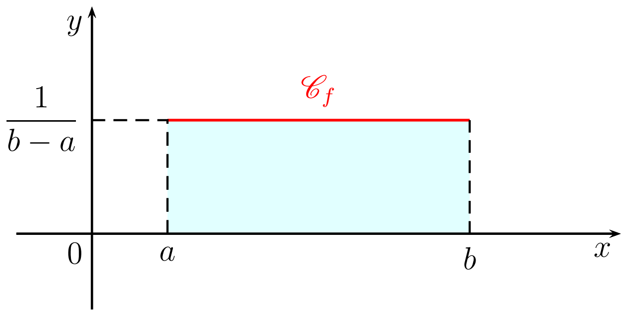
   Alors, pour tous réels a et b avec $a < b$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   $P(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[a;b]$.

III Loi uniforme sur $[a;b]$

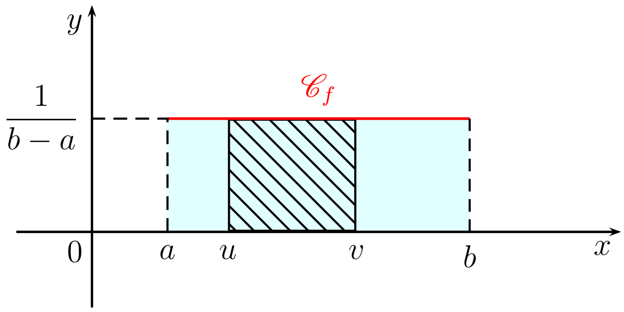
Définition
Soient a, b deux réels tels que $a < b$.
Une variable aléatoire X à valeurs dans $[a;b]$ suit la loi uniforme $\mathscr{U}_{[a;b]}$ si sa densité de probabilité est la fonction constante f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ si $t \in [a;b]$, et $f(t) = 0$ si $t \notin [a;b]$.

Exercice 2
Vérifier que $f : \begin{array}{rcl} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{b-a} \end{array}$ est bien une fonction de densité de probabilité sur $[a;b]$.



Propriété
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$.
Alors, pour tous réels u et v tels que $a \leqslant u \leqslant v \leqslant b$,

$$P(u \leqslant X \leqslant v) = \frac{v-u}{b-a} = \frac{\text{longueur de l'intervalle } [u;v]}{\text{longueur de l'intervalle } [a;b]}.$$



Propriété (espérance, variance, écart-type de la loi uniforme)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.
$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ $\qquad V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

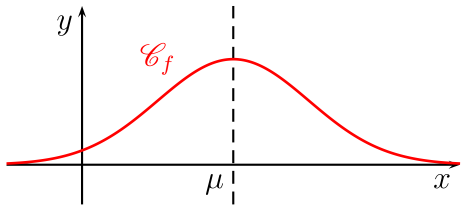
Exercice 3
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 9]$.

1. Donner sa fonction de densité.
2. Calculer $P(X \leqslant 3)$, et $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$, et $\sigma(X)$.

IV Loi normale

Définition
Une variable aléatoire X à valeurs réelles suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ d'espérance μ et d'écart-type σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Ainsi, pour tous réels a et b avec $a<b$, on a $P(a\leqslant X\leqslant b)=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.



La courbe de la fonction de densité est appelée courbe de Gauss (ou courbe en cloche).

Remarque
Soit X une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.
Alors l'espérance de X est $E(X)=\mu$, et l'écart-type de X est $\sigma(X)=\sigma$.

Utilisation de la calculatrice pour la loi normale

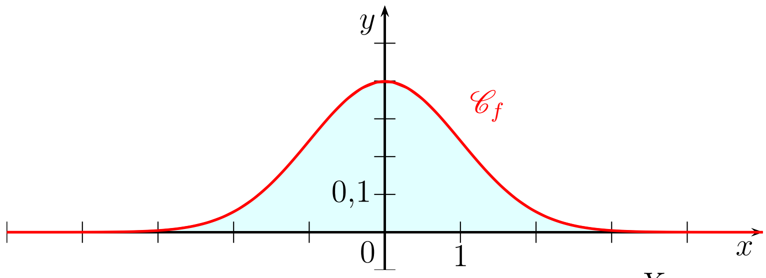
	Casio	Texas	Numworks
chemin	Opt Stat Dist Norm	Distrib	Outils Proba Lois Normale
$P(a<X<b)$	`NormCD(a,b,`σ`,`μ`)`	`normalFRep(a,b,`μ`,`σ`)`	`normcdfrange(a,b,`μ`,`σ`)`
Nombre réel k tel que $P(X<k)=c$	`InvNormCD(c,`σ`,`μ`)`	`FracNormale(c,`μ`,`σ`)`	`invnorm(c,`μ`,`σ`)`

Remarque
On peut utiliser l'instruction calculant $P(a<X<b)$ pour
— $P(x<b)$ en remplaçant a par -10^{99},
— $P(X>a)$ en remplaçant b par 10^{99}.

Propriété (1-2-3 sigma : à connaître par cœur)
Soit X une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

1. $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0,683$.
2. $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0,954$.
3. $P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0,997$.

Remarque (loi normale centrée réduite)
— La loi normale centrée réduite est $\mathcal{N}(0;1)$ d'espérance 0 et écart-type 1.



— Une variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ ssi la variable $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

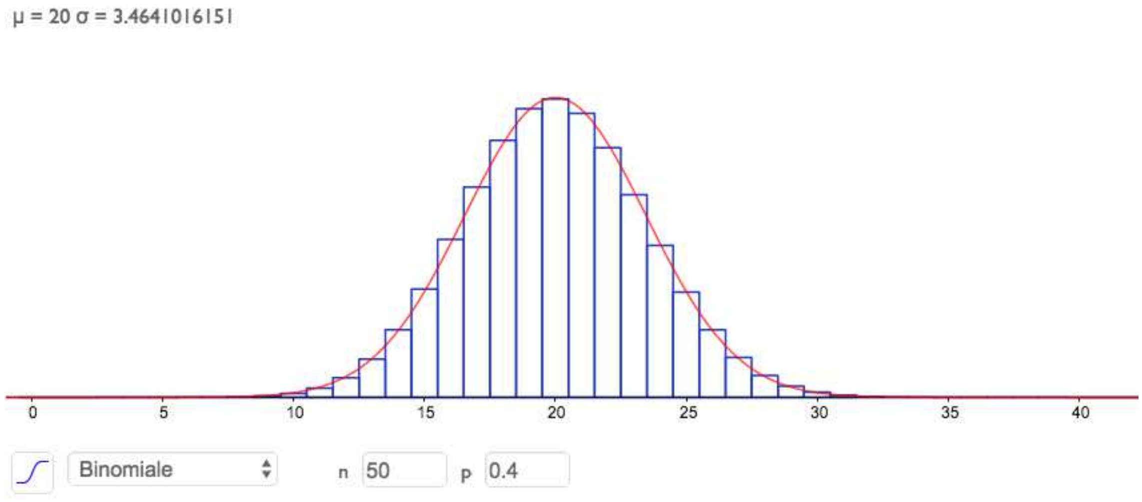
IV.1 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété
On peut approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ si $n > 30$, $np > 5$, et$n(1-p) > 5$.
Alors, on choisit $\mu = np$, et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ afin de garder l'espérance et l'écart-type.
Il faut alors tenir compte de la correction de continuité.

Exercice 4 (introduction à la correction de continuité)
Un problème :
La variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 045$.
La variable Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
Peut-on utiliser Y à la place de X pour calculer des probabilités ?
Étude de ce problème :
On arrondira les résultats au millième le plus proche.

1. Calculer μ et σ.
2. Déterminer $P(X \leqslant 92)$ et $P(X = 92)$.
3. Déterminer $P(Y \leqslant 92)$ et $P(Y \leqslant 92,5)$. Comparer avec le résultat obtenu avec X.
   Le caractère continu de la loi de Y fait que l'on approche $P(X \leqslant 92)$ par $P(Y \leqslant 92,5)$.
4. Que vaut $P(Y = 92)$? Déterminer $P(91,5 < Y < 92,5)$. Comparer avec le résultat obtenu avec X, soit $P(X = 92)$.
   Le caractère continu de la loi de Y fait que l'on approche $P(X = 92)$ par $P(91,5 < Y < 92,5)$.

Exemple de correction de continuité :
La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50;0,4)$.
On vérifie les trois conditions :
$n = 50 > 30$, $np = 50 \times 0,4 = 20 > 5$, et $n(1-p) = 50 \times 0,6 = 30 > 5$.
On peut donc approcher X par la variable Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ avec :
— $\mu = np = 50 \times 0,4 = 20$
— $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0,4 \times 0,6} \approx 3,4641$.



Notons Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(20; 3,4641)$.
Pour calculer des probabilités, on tient compte de la **correction de continuité** :

— pour approcher $P(X = 22)$, on calcule $P(21,5 \leqslant Y \leqslant 22,5)$

— pour approcher $P(X \leqslant 22)$, on calcule $P(Y \leqslant 22,5)$

— pour approcher $P(X \geqslant 16)$, on calcule $P(Y \geqslant 15,5)$

— pour approcher $P(18 \leqslant X \leqslant 22)$, on calcule $P(17,5 \leqslant Y \leqslant 22,5)$

V Variables indépendantes. Théorème central limite

Propriété (espérance et variance de $X + Y$ et $X - Y$)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, et $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$.
2. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, et$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$.

Propriété (somme de deux lois normales)
Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1)$, et $\mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2)$, alors la variable $X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Théorème (central limite)
Soient X_1, X_2, $\ldots$, X_n des variables indépendantes suivant toutes la même loi d'espérance μ et d'écart-type σ.
Pour n suffisamment grand, la variable $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Conséquence (moyenne d'un échantillon)
Soient une population de moyenne μ et d'écart-type σ et $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire prélevé avec remise et d'effectif n, associe la moyenne de cet échantillon.
Pour n suffisamment grand, la variable aléatoire $\overline{X}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Exemple :
Après la correction d'une épreuve du baccalauréat, on constate que les notes ont pour moyenne 12 et pour écart-type 3.
Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire et avec remise de 100 copies, associe la moyenne de cet échantillon.
La variable aléatoire $\overline{X}$ suit alors approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(12; \dfrac{3}{\sqrt{100}}\right)$, soit $\mathcal{N}(12; 0,3)$.

Conséquence (fréquence d'un échantillon)
Soit une population dont les individus possèdent une certaine propriété avec la proportion p.
Notons F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire prélevé avec remise de d'effectif n, associe la fréquence de la propriété dans l'échantillon.
Pour n suffisamment grand, la variable aléatoire F suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Exemple :
Après la correction d'une épreuve du baccalauréat, on constate que 25% des élèves n'ont pas la moyenne ? Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire et avec remise de 100 copies, associe la fréqence de copies qui n'ont pas la moyenne.
La variable aléatoire F suit alors approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(0,25; \sqrt{\dfrac{0,25(1-0,25)}{100}}\right)$, soit $\mathcal{N}(0,25; 0,043)$.

VI Complément : généralités sur les lois de probabilité à densité

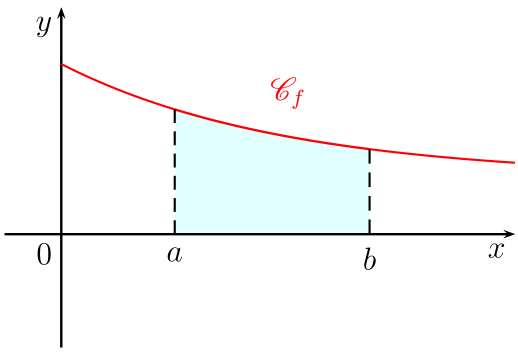
Jusqu'à présent, on a toujours rencontré des variables aléatoires qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (variable discrète).
Par exemple, une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ prend ses valeurs dans $\{0;1;\ldots;n\}$.

Vocabulaire :
On dit qu'une variable aléatoire est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple :
On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;1]$.
La variable aléatoire X correspondant au nombre obtenu est continue. Les valeurs possibles pour X sont tous les réels de $[0;1]$.

Définition

1. On appelle fonction de densité de probabilité sur l'intervalle I toute fonction définie sur I, continue et positive sur I, et telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.
2. Une variable aléatoire à densité X sur un intervalle I est définie par la donnée d'une fonction de densité de probabilité f définie sur I.
   Alors, la probabilité pour que X appartienne à un intervalle $[a;b]$ de I est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a;b]$, soit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Remarque

1. Avec $[a;b] \subset I$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $P(X \in I) = 1$ car $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 5

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité sur $[1;\mathrm{e}]$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer k pour que g soit une fonction de densité sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};k\right]$.

Propriété

Pour tous réels a et b appartenant à I :

1. $P(X = a) = 0$.
2. $P(X \leqslant a) = P(X < a)$ (on peut échanger inégalités larges et strictes).
3. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - P(X < a)$.
4. $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leqslant a)$.

Définition (espérance)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle $[a; b]$.

L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\, \mathrm{d}t$.

Remarque

On fera le lien avec l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i P(X = x_i).$$