Chapitre 11 : La fonction exponentielle

I Définition

Propriété (rappel)
Soient a et b deux réels, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

On considère la fonction affine $u : \begin{array}{ccc} I & \to & J \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$, et v une fonction dérivable sur l'intervalle J.
Alors la fonction $f = v \circ u$ définie sur I par $f(x) = v(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = a \times v'(ax+b).$$

Théorème
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration (unicité, à connaitre)
On admet qu'il existe une telle fonction. On montre l'unicité.

1. On montre qu'une telle fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
   Par produit (et composée), Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$.
   D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\Phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x)f'(-x)$$
   Or, $f' = f$, ce qui donne
   $$\begin{aligned} \Phi'(x) &= f(x) \times f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Comme $\Phi' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la fonction Φ est constante.
   Or, $f(0) = 1$, donc $\Phi(0) = f(0)^2 = 1$.
   Φ est la fonction constante égale à 1.
   Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.
   La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Démonstration de l'unicité de la fonction f.
   Considérons une autre fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
   Alors g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (d'après 1.).
   Par quotient de fonction dérivables, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x)}{[g(x)]^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$
   On en déduit que la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
   Or, $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$.

Donc $\dfrac{f}{g}$ est la fonction constante égale à 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.
Conclusion : il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. □

Définition
On appelle fonction exponentielle et on note exp l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Propriété
1. La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. $\exp(0) = 1$

Remarque
1. On rappelle que toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a montré au cours de la démonstration du théorème que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Propriété
1. La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) > 0$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration
1. Première méthode :
   Par définition, la fonction exp est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, avec $\exp(0) = 1$.
   Or, on a vu que la fonction exp ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$ (voir la démonstration de l'unicité).
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
   Deuxième méthode :
   Soit $a \in \mathbb{R}$, $a = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}$.
   $$\begin{aligned} \exp(a) &= \exp\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= \left[\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$
   Donc $\exp(a) \geqslant 0$.
   Or, on a vu que la fonction exp ne peut pas s'annuler (voir la démonstration de l'unicité du premier théorème, première partie).
   Donc $\exp(a) > 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Propriété (relation fonctionnelle)
Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration
Soient a et b deux réels.
Posons $g(x) = f(a+b-x) \times f(x)$ où f est la fonction exponentielle.
La fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ a pour dérivée $x \mapsto -f'(a+b-x) = -f(a+b-x)$.
Par produit de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & -f'(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f'(x) \\ & = & -f(a+b-x)f(x) + f(a+b-x)f(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
$g(0) = f(a+b)f(0) = f(a+b)$.
$g(b) = (a+b-b)f(b) = f(a) \times f(b)$.
Comme g est constante, $g(0) = g(b)$, soit $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
Conclusion : pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$. □

II Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété
Pour tous réels a et b,

1. $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. $\exp(-a) \times \exp(a) = \exp(-a+a) = \exp(0) = 1$.
   De plus, la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
2. On en déduit que $\exp(a-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
3. Démonstration par récurrence.
   Soit $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer la propriété $P(n)$: pour tout entier $n \geqslant 0$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.
   Initialisation
   Pour $n = 0$, $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1$, et $(\exp(a))^0 = 1$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité
   Soit $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie : $\exp(ka) = (\exp(a))^k$.
   Montrons $P(k+1)$.

$$\begin{array}{rcl}\exp((k+1)a) & = & \exp(ka+a) \\ & = & \exp(ka)\times\exp(a) \\ & = & (\exp(a))^k\times\exp(a) \\ & = & (\exp(a))^{k+1}\end{array}$$

Donc La propriété est vraie au rang $k+1$.
Conclusion
Par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Soit maintenant n un entier négatif, alors $-n > 0$, et donc

$$\begin{array}{rcl}\exp(na) & = & \dfrac{1}{\exp(-na)} \\ & = & \dfrac{1}{(\exp(a))^{-n}} \\ & = & (\exp(a))^n\end{array}$$

Donc pour tout entier relatif n ($n \in \mathbb{Z}$), $\exp(na) = (\exp(a))^n$. □

Définition
L'image de 1 par la fonction exponentielle se note e, c'est-à-dire $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarque
$\mathrm{e} \approx 2.71828$.

Remarque
D'après la propriété ci-dessus, pour tout entier n,

$$\exp(n) = \exp(1\times n) = [\exp(1)]^n = \mathrm{e}^n$$

On généralise cette écriture à tout réel x.

Définition (Notation)
Pour tout x réel, on note e^x l'image de x par la fonction exponentielle : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Avec la nouvelle notation, les propriétés déjà vues s'écrivent

Propriété
1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle-même.
2. $\mathrm{e}^0 = 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
4. Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :
   (a) $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
   (b) $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$.
   (c) $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$.
   (d) $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$.

Théorème (équation et inéquation)
Pour tous réels a et b,

1. $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ équivaut à $a = b$.
2. $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ équivaut à $a < b$.

Démonstration

1. Si $a = b$, alors $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$.
   Réciproquement, si $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = 1$, soit $\mathrm{e}^{a-b} = 1$.
   Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{e}^0 = 1$.
   Donc $a - b = 0$.
   En effet, si on avait $a - b < 0$, on aurait $\mathrm{e}^{a-b} < \mathrm{e}^0$, ce qui n'est pas.
   De même, si on avait $a - b > 0$, on aurait $\mathrm{e}^{a-b} > \mathrm{e}^0$, ce qui n'est pas.
   Donc $a - b = 0$, $a = b$.
2. Si $a < b$, alors, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.
   Réciproquement, supposons que $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.
   Si on avait $a \geqslant b$, toujours via la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on aurait $\mathrm{e}^a \geqslant \mathrm{e}^b$, contradiction.
   Donc $a < b$. □

Exercice 1
Application à la résolution d'équations et d'inéquations :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\mathrm{e}^{2x+1} < \mathrm{e}^{3x-3}$.
Résoudre de même $\mathrm{e}^{(x^2)} < \mathrm{e}^4$.

III Étude de la fontion exponentielle

Propriété

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Démonstration (à connaître)

1. Limite en $+\infty$.
   Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   Comme $\mathrm{e}^0 = 1$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ est positif pour tout $x \geqslant 0$.
   Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

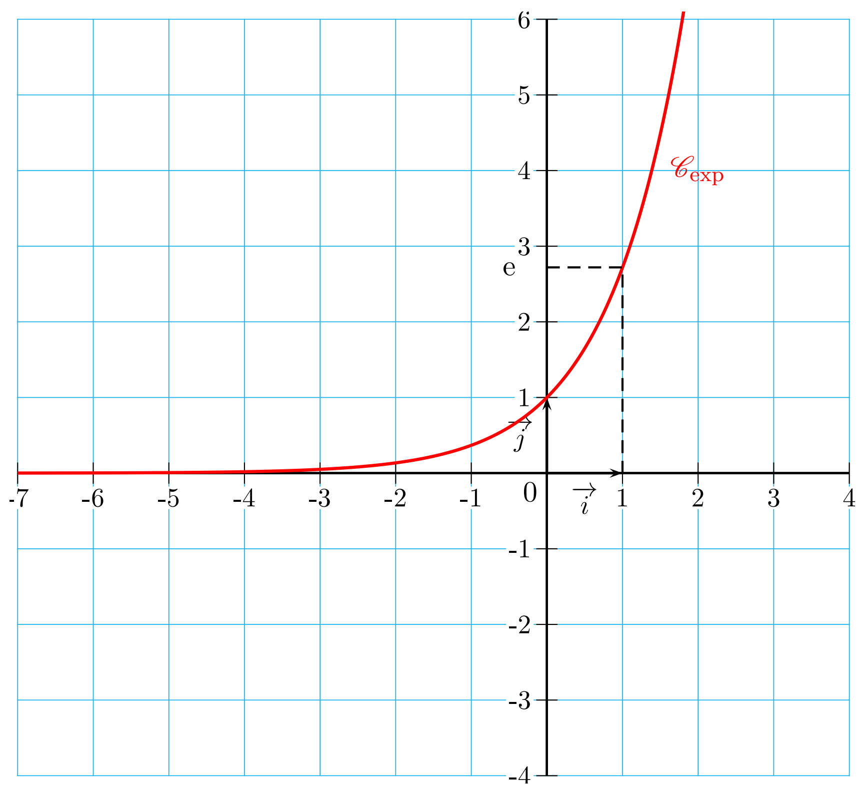
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 1$.
A fortiori, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, soit $e^x \geqslant x$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on peut conclure, par comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2. Limite en $-\infty$.
Posons $Y = -x$, lorsque x tend vers $-\infty$, Y tend vers $+\infty$. On a alors $x = -Y$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{Y \to +\infty} e^{-Y} = \lim\limits_{Y \to +\infty} \frac{1}{e^Y} = 0$, car $\lim\limits_{Y \to +\infty} e^Y = +\infty$. $\square$

On a vu que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



Remarque
Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, l'axe des abscisses (d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto e^x$ en $-\infty$.

Théorème (Quelques limites importantes)

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration

1. Montrons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

   Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Les fonctions f et f' sont dérivables, et on a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
   Or, on a vu que pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$ (la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$).
   Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f''(x) \geqslant 0$.
   Par conséquent, f' est croissante sur $[0; +\infty[$.
   Comme $f'(0) = e^0 - 0 = 1$, il est clair que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.
   Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   Or, $f(0) = e^0 - \dfrac{0^2}{2} = 1$, on a montré que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 1 > 0$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
signe de f''	$+$
variations de f'	1 $\nearrow$
signe de f'	$+$
variations de f	1 $\nearrow$

   Ainsi, pour tout $x > 0$, $e^x > \dfrac{x^2}{2}$.
   Comme $x > 0$, cela s'écrit aussi $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.
   Donc, par comparaison de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = -\dfrac{-x}{e^{-x}}$.
   Si x tend vers $-\infty$, $Y = -x$ tend vers $+\infty$.
   Par composée de limites,
   $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{-x}{e^{-x}} = \lim\limits_{Y \to +\infty} -\dfrac{Y}{e^Y} = 0$.
   En effet, on vient de montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

3. Montrons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
   La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp' = \exp$.
   Elle est donc dérivable en particulier en 0.
   Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0 est $e^0 = 1$.
   Par définition du nombre dérivé, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. $\square$

IV Exponentielle d'une fonction

IV.1 e^u

Dans ce paragraphe, u est une fonction définie sur un intervalle I, et on considère la fonction e^u (fonction composée $\exp \circ u$), qui, à tout réel x de I associe le réel (positif) $\mathrm{e}^{u(x)}$.

$$\mathrm{e}^u : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{u(x)} \end{array}$$

Exemple :
$f(x) = \mathrm{e}^{3x-5}$, où $u(x) = 3x - 5$.

Théorème (Dérivée de e^u)
Si u est dérivable sur I, alors e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u.$$

En particulier, si $u(x) = ax + b$ (fonction affine)

$$(\mathrm{e}^{ax+b})' = a\mathrm{e}^{ax+b}.$$

Conséquence (sens de variation)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors u et e^u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration
Comme $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$ et que pour tout $x \in I$, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$, il est clair que $(\mathrm{e}^u)'$ et u' ont le même signe. □

Exercice 2
Dériver les fonctions : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1} + 2$.
$g(x) = 5\mathrm{e}^{x^2+1}$.

Théorème (limites de e^u)
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit u une fonction définie au voisinage de a.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{u(x)} = +\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{u(x)} = 0$.

IV.2 Étude des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, $k > 0$

Soit $k > 0$. Posons $f_k(x) = \mathrm{e}^{-kx}$. La fonction f_k est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Signe
   Une exponentielle est toujours strictement positive.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx} > 0$.
2. Variations
   Par composée de fonctions dérivables, f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx} < 0$ (car $k > 0$).
   Donc f_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

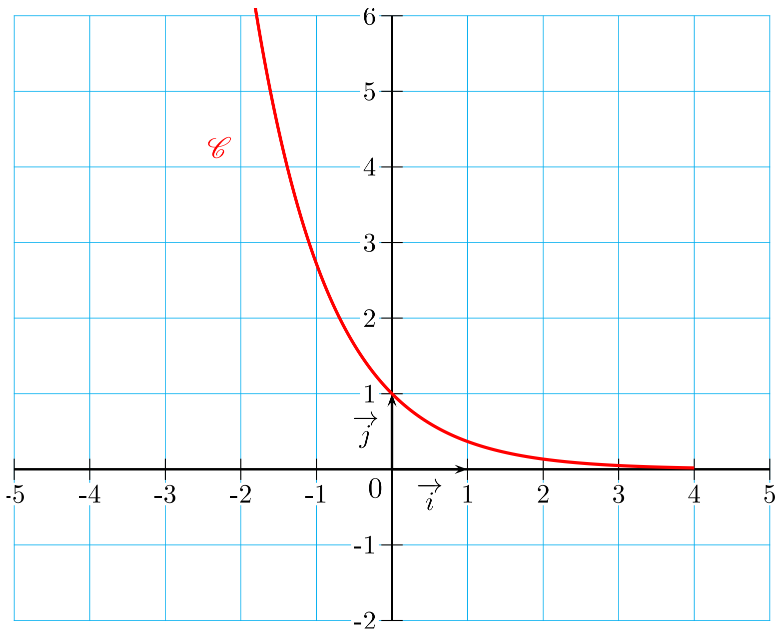
3. Limites
   $\lim_{x \to -\infty} -kx = +\infty$.
   $\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$.
   Par composée, $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$.

   $\lim_{x \to +\infty} -kx = -\infty$.
   $\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
   Par composée, $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$.

4. Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$ ↘	0

5. Courbe représentative



Remarque : $f_k(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
Comme $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction f_k.

IV.3 Étude des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$, $k > 0$

Soit $k > 0$. Posons $g_k(x) = \mathrm{e}^{-kx^2}$. La fonction g_k est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Signe
   Une exponentielle est toujours strictement positive.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx^2} > 0$.

2. Variations
Par composée de fonctions dérivables, g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g_k'(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$.
Donc g_k' a le même signe que $-2kx$ (soit le signe contraire de x).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction g_k est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un maximum en 0.

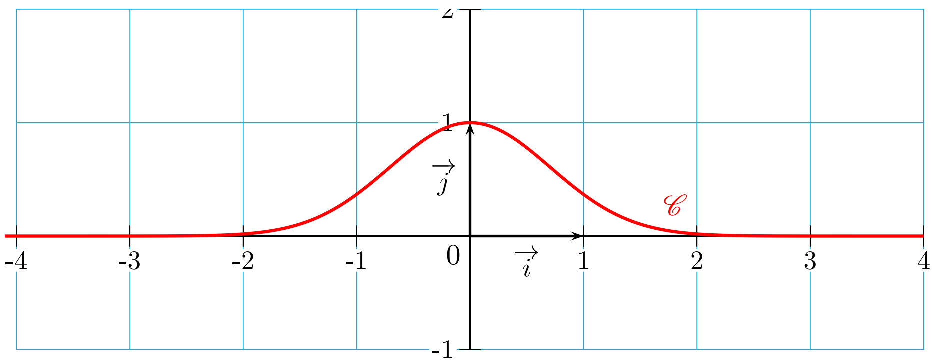
3. Limites
$\lim\limits_{x \to -\infty} -kx^2 = -\infty$.
$\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -kx^2 = -\infty$.
$\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_k(x) = 0$.

4. Tableau de variation
$g_k(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. Courbe représentative



Remarque :

1. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_k(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de la fonction g_k en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(-x) = g_k(x)$ (la fonction g_k est paire).
Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de g_k est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.