1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°2

Exercice 1 (71 page 259)

1. Le cercle de centre $C(-6;-8)$ et de rayon 10 a pour équation $(x+6)^2+(y+8)^2=10^2$, soit $\boxed{(x+6)^2+(y+8)^2=100.}$

2. Étudions si ce cercle passe par l'origine du repère.
   On teste les coordonnées du point $O(0;0)$ dans l'équation.
   $(0+6)^2+(0+8)^2=36+64=100.$
   $\boxed{\text{Donc ce cercle passe par } O(0;0).}$

Exercice 2 (74 page 258)

1. $x^2+y^2-6x+8y=0$
   $\Leftrightarrow (x^2-6x)+(y^2+8y)=0$
   $\Leftrightarrow (x^2-2\times x\times 3+3^2)-3^2+(y^2+2\times y\times 4+4^2)-4^2=0$
   $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2-9-16=0$
   $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$
   $\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=5^2.$
   $\boxed{\text{C'est donc l'équation du cercle de centre } A(3;-4) \text{ et de rayon } 5.}$

2. $x^2+y^2+5x-y-1=0$
   $\Leftrightarrow (x^2+5x)+(y^2-y)-1=0$
   $$\Leftrightarrow \left[x^2+2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left[y^2-2\times y\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=0$$
   $$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{25}{4}+\frac{1}{4}$$
   $$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{30}{4}$$
   $$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2.$$
   $$\boxed{\text{C'est donc l'équation du cercle de centre } B\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{30}}{2}.}$$

Exercice 3 (92 page 260)

Dans un repère orthonormé, on donne $E(1;-2)$, $F(3;8)$, et $G(-3;1)$.

1. Équation de la hauteur issue de E.
   Notons d cette droite. d est la droite passant par E et orthogonale à (FG).
   Donc d est la droite passant par $E(1;-2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{FG}$.
   $\overrightarrow{FG}(x_G-x_F;y_G-y_F)$, soit $\overrightarrow{FG}(-6;-7)$.
   Soit $M(x;y)$ un point du plan. $\overrightarrow{EM}(x-1;y+2)$.
   $M\in d$ ssi $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FG}=0$ ssi $-6(x-1)-7(y+2)=0$ ssi $-6x-7y-8=0$.
   $\boxed{\text{Une équation de la hauteur issue de } E \text{ est } 6x+7y+8=0.}$

2. Équation de la médiatrice du segment $[EF]$.
   C'est la droite d' passant par le milieu K de $[EF]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{EF}$.
   $\overrightarrow{EF}(x_F-x_E;y_F-y_E)$, soit $\overrightarrow{EF}(2;10)$.
   $x_K=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2$, et $y_K=\dfrac{y_E+y_F}{2}=\dfrac{-2+8}{2}=3$. Comme $\overrightarrow{EF}(2;10)$ est normal à d', d' admet une équation de la forme $2x210y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$ à déterminer.
   De plus, $K(2;3)\in d'$, donc $2\times 2+10\times 3+c=0$, $c=-34$.
   $\boxed{d' \text{ a pour équation } 2x+10y-34=0, \text{ ou encore } x+5y-17=0.}$

Exercice 4 (93 page 260)
On a $A(0;1)$ et la droite d d'équation $x-2y-3=0$.

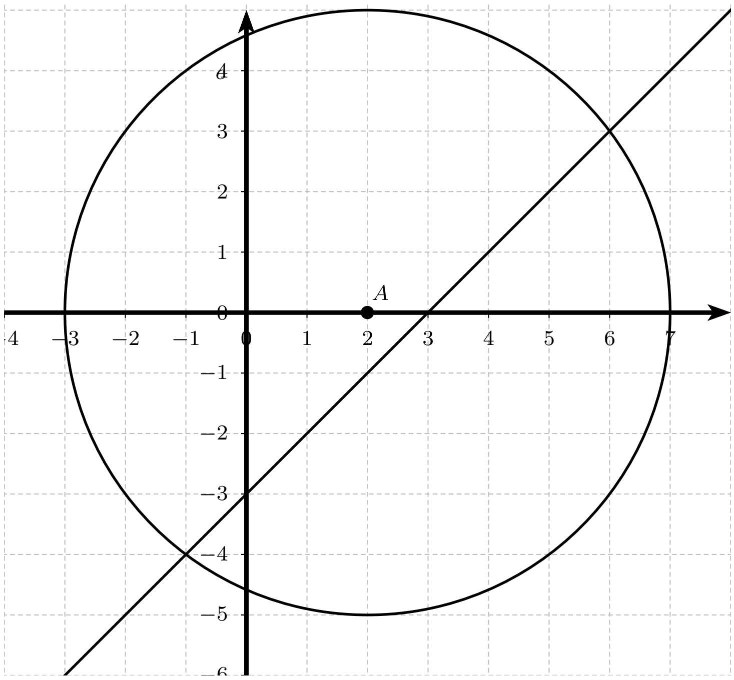
1. Soit Δ la perpendiculaire à d passant par A.
   D'après le cours, le vecteur $\overrightarrow{u}(2;1)$ dirige la droite d (avec les notations du cours $(-b;a)$).
   Or, $\Delta \perp d$, donc $\overrightarrow{u}(2;1)$ est aussi un vecteur normal à Δ.
   Δ admet une équation de la forme $2x+y+c=0$ avec $c \in \mathbb{R}$ à déterminer.
   Comme $A(0;1) \in \Delta$, $2\times 0+1+c=0$, et $c=-1$.
   $\boxed{\Delta \text{ a pour équation } 2x+y-1=0, \text{ ou } y=-2x+1.}$
2. Coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.
   H est le point d'intersection des droites d et Δ.
   On résout le système : $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y=-2x+1 \end{cases}$.
   Par substitution, $\begin{cases} x-2(-2x+1)-3=0 \\ y=-2x+1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$
   $\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } A \text{ sur } d \text{ est } H(1;-1).}$

Exercice 5 (94 page 260)
On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2-2x+y^2+6y+1=0$.

1. Déterminons ses éléments caractéristiques : centre et rayon.
   $x^2-2x+y^2+6y+1=0$
   $\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9+1=0$.
   $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=3^2$.
   $\boxed{\mathscr{C} \text{ est donc le cercle de centre } K(1;-3) \text{ et de rayon } 3.}$
2. Déterminer une équation du cercle de centre $P(3;2)$ et de rayon 2.
   $\boxed{\text{Voici une équation de ce cercle : } (x-3)^2+(y-2)^2=4.}$

Exercice 6 (95 page 260)
Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(2;0)$ et de rayon 5, et d la droite d'équation $x-y-3=0$.

1. $\boxed{\mathscr{C} \text{ a pour équation } (x-2)^2+(y-0)^2=5^2, \text{ soit } (x-2)^2+y^2=25.}$
2. Calculons la distance du point A à la droite d.
   D'après une propriété de cours,
   $d(A;d)=\dfrac{|x_A-y_A-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2-0-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Question supplémentaire (non demandé dans le manuel).
   Que peut-on en déduire sur la nature de l'intersection de $\mathscr{C}$ et d ?
   Comme la distance du point A (centre du cercle $\mathscr{C}$) à la droite d est strictement inférieure au rayon du cercle (5), on en déduit que $\mathscr{C}$ et d ont deux points d'intersection distincts.
   On peut déterminer leurs coordonnées en résolvant le système : $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=25 \\ x-y-3=0 \end{cases}$.
   On isole y dans la la 2e équation, puis par substitution,
   $\begin{cases} (x-2)^2+(x-3)^2=25 \\ y=x-3 \end{cases}$. $\begin{cases} 2x^2-10x-12=0 \\ y=x-3 \end{cases}$. $\begin{cases} x^2-5x-6=0 \quad (*) \\ y=x-3 \end{cases}$.
   On résout l'équation $(*)$, du second degré.
   $\Delta=49>0$ (on attend bien deux solutions), et après calculs (que je n'ai pas détaillés), les solutions sont -1 et 6.
   Pour $x=-1$, il vient $y=x-3=-4$.
   Pour $x=6$, il vient $y=x-3=3$.
   $\boxed{\mathscr{C} \text{ et } d \text{ se coupent aux points } B(-1;-4) \text{ et } C(6;3).}$



De façon générale, l'intersection d'une droite et d'une cercle peut être l'ensemble vide, ou un point (si la droite est tangente au cercle), ou deux points.

Exercice 7 (ex 3 partie cours du ch10)
Étudier le sens de variation des suites suivantes :

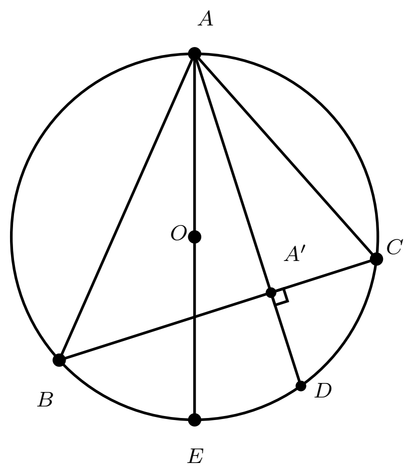
1. (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5$ et de raison -3.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = (a_n - 3) - a_n = -3 < 0$.
   Ou bien :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + nr = 5 - 3n$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $a_{n+1} - a_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n) = 5 - 3n - 3 - 5 + 3n = -3 < 0$.
   $\boxed{\text{Donc } (a_n) \text{ est strictement décroissante.}}$
   Autre méthode : C'est la suite associée à la fonction affine $f(x) = -3x + 5$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur est $a = -3 < 0$.
2. (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = b_n - (n-3)^2$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = -(n-3)^2 \leqslant 0$ (car un carré est toujours positif ou nul).
   $\boxed{\text{Donc } (b_n) \text{ est décroissante.}}$
3. Pour tout entier n, $c_n = n^3 - 9n^2$.
   $c_0 = 0$, $c_1 = 1^3 - 9 \times 1^2 = 1 - 9 = -8$.
   $c_9 = 9^3 - 9 \times 9^2 = 0$, et $c_{10} = 10^3 - 9 \times 10^2 = 1000 - 900 = 100$.
   Comme $c_1 < c_0$, la suite n'est pas croissante.
   Comme $c_{10} > c_9$, la suite n'est pas décroissante.
   $\boxed{\text{Donc } (c_n) \text{ n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).}}$
4. (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 \times q^n = 1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^n}$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $d_{n+1} - d_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{3}{3^{n+1}} = \dfrac{-2}{3^{n+1}} < 0$.
   En effet, $3^{n+1} = 3^n \times 3$.
   $\boxed{\text{Donc la suite } (d_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

Exercice 8 (ex 5 partie cours du ch10)
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1-2n}{n+5}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   Pour tout $n \geqslant 0$,
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-2(n+1)}{n+1+5} - \dfrac{1-2n}{n+5}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2n-1}{n+6} - \dfrac{1-2n}{n+5}$.
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-2n-1)(n+5)-(1-2n)(n+6)}{(n+5)(n+6)}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2n^2-11n-5-(-2n^2-11n+6)}{(n+5)(n+6)}$
   $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{11}{(n+5)(n+6)} < 0$.
   En effet, n est en entier naturel, donc $n+5>0$, et $n+6>0$.
   Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.
   $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$
2. Justifier qu'elle est minorée par -2.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n - (-2) = u_n + 2 = \dfrac{1-2n}{n+5} + \dfrac{2(n+5)}{n+5} = \dfrac{11}{n+5} > 0$.
   De même, n est un entier naturel, donc $n+5>0$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_n > -2.\ (u_n) \text{ est minorée par } -2.}$

3. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout entier n.
   Toute suite décroissante est majorée par son 1er terme.
   Ici, $u_0 = \dfrac{1}{5}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ -2 < u_n \leqslant \dfrac{1}{5}.\ \text{La suite } (u_n) \text{ est bornée.}}$

Exercice 9 (Sujet C page 243)
A, B, et C sont trois points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en A' et $\mathscr{C}$ en D. Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   Par linéarité du produit scalaire, puis relation de Chasles,
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
   En effet, (AD) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC, donc $(AD) \perp (BC)$, et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AA'}$.
   De la question 1, il vient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   Par définition de A', le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) est A'.
   Par projeté, on a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   On a montré que $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   Enfin, comme D appartient au cercle de diamètre $[AE]$, par propriété, on a $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ (le triangle ADE est rectangle en D).
   Ainsi, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}+0=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}$.
   $\boxed{\text{Conclusion : } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AA'}}$

Exercice 10 (91 page 260, non détaillé)
On donne $E(5;0)$, $H(8;4)$.

1. d est la droite passant par $H(8;4)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{EH}(3;4)$.
   D'où une équation de la forme $3x+4y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$.
   Et comme $H(8;4)\in d$, $3\times 8+4\times 4+=0$, $c=-40$.
   $\boxed{d \text{ a pour équation } 3x+4y-40=0.}$
2. Équation de $\mathscr{C}_1$.
   $EH=\sqrt{(x_H-x_E)^2+(y_H-y_E)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
   Donc $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $E(4;0)$ et de rayon 5.
   $\boxed{(x-5)^2+y^2=25}$
3. $\mathscr{C}_2 : x^2-22,5x+y^2+125=0$. Centre K et rayon.
   $(x-11,25)^2-11,25^2+(y-0)^2+125=0$.
   $(x-11,25)^2+y^2=1,25^2$.
   $\boxed{\mathscr{C}_2 \text{ est le cercle de cente } K(11,25;0) \text{ et de rayon 1,25.}}$
4. Montrons que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un seul point commun.
   On résout le système : $\begin{cases}(x-5)^2+y^2=25 \quad (L1)\\ (x-11,25)^2+y^2=1,25^2 \quad (L2)\end{cases}$.
   En soustrayant membre à membre les équations, on élimine y.
   (L1)-(L2) donne $(x-5)^2-(x-11,25)^2=25-1,5625$.
   En développant, $x^2-10x+25-(x^2-22,5x+126,5625)=23,4375$
   Puis $12,5x=125$, et donc $x=10$.
   Dans l'équation de $\mathscr{C}_1$, $x=10$ donne $5^2+y^2=25$, soit $y=0$.
   Dans l'équation de $\mathscr{C}_2$, $x=10$ donne $1,25^2+y^2=1,25^2$, soit $y=0$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ ont un seul point commun, le point } I(10;0).}$
5. Coordonnées du projeté orthogonal P de K sur d.
   Soit d' la perpendiculaire à d passant par K.
   P est le point d'intersection de d et d'. On détermine une équation de d'.
   Comme $\overrightarrow{n}(3;4)$ est normal à d, il dirige d', et d' a une équation de la forme $4x-3y+c=0$ (si $\overrightarrow{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur, la droite a une équation $ax+by+c=0$).
   Comme $K(11,25;0)\in d'$, $45-0+c=0$, $c=-45$.
   d' a pour équation $4x-3y-45=0$.
   Ensuite, on résout $\begin{cases}3x+4y-40=0\\ 4x-3y-45=0\end{cases}$

$$\begin{cases}12x+16y-160=0\\ 12x-9y-135=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}25y-25=0\\ 3x+4y-40=0\end{cases}$$

$\left\{ y = 1x = 12 \right.$

$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } K \text{ sur } d \text{ est } P(12;1)}$

6. Distance du point K à la droite d.
   C'est la longueur KP (on peut aussi utiliser la formle de cours de distance d'un point à une droite).
   $KP = \sqrt{(x_P - x_K)^2 + (y_P - y_K)^2} = \sqrt{(12 - 11,25)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1,5625} = 1,25$
7. Montrons que P est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_2$ et d.
   Il est clair que, par définition, $P \in d$ (c'est le projeté orthogonal de K sur d).
   En outre on observe que $KP = 1,25$ qui est le rayon de $\mathscr{C}_2$. Donc $P \in \mathscr{C}_2$.
   De plus, on sait que $(KP) \perp d$ (toujours par définition de P).
   Donc d passe par un point de $\mathscr{C}_2$ et est perpendiculaire au rayon correspondant, ce qui prouve que d est tangente à $\mathscr{C}_2$ en P.
   $\boxed{P \text{ est donc le seul point d'intersection de } \mathscr{C}_2 \text{ et } d.}$