

1G. Interrogation n° 1.

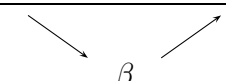
Correction du sujet 1

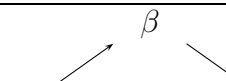
Exercice 1 (cours, 2 points)

La forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

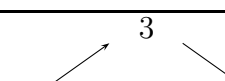
Exercice 2 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x - 1)^2 + 3$. Déterminer le tableau de variation de f . Justifier.

On reconnaît la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -5$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

Comme $a = -5 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

Le sommet est $S(1; 3)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 - 9x - 11 = 0$.

$a = 2$, $b = -9$ et $c = -11$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-11) = 81 + 88$

$\Delta = 169 = 13^2 > 0$.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 13}{4} = -1$.

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 13}{4} = \frac{11}{2}$.

Les solutions de l'équation sont $\frac{11}{2}$ et -1 .

2. $-2x^2 + 3x - 1 = -5x + 7$.

Cela équivaut à $-2x^2 + 8x - 8 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 0$.

L'équation admet une seule solution.

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-2)} = 2$.

$S = \{2\}$

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 7$. Mettre $f(x)$ sous forme canonique. Justifier.

$a = 3$, $b = -1$ et $c = 7$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$.

$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 7 = \frac{1 - 2 + 7 \times 12}{12} = \frac{83}{12}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}$.

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 - x + 7 \\
 &= 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 7 \\
 &= 3\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right] + 7 \\
 &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{36} + 7 \\
 &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{7 \times 12}{12} \\
 &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{83}{12}
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-4x^2 + 5x < 0$.

En factorisant, on trouve les racines sans calculer Δ .

$$4x^2 + 5x = x(-4x + 5).$$

Donc $-4x^2 + 5x = 0$ ssi $x = 0$ ou $-4x + 5 = 0$ ssi ($x = 0$ ou $x = \frac{5}{4}$).

Les racines du trinôme sont donc 0 et $\frac{5}{4}$.

Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, et ici $a = -4 < 0$.

x	$-\infty$	0	$5/4$	$+\infty$	
$-4x^2 + 5x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour l'inéquation $-4x^2 + 5x < 0$, l'ensemble solution est $S =]-\infty; 0[\cup]\frac{5}{4}; +\infty[$.

Exercice 6 (Bonus, 1 point)

Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(-1; 3)$ et passe par le point $A(-5; 7)$.

Comme le sommet est $S(-1; 3)$, il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x + 1)^2 + 3$ (forme canonique).

Comme $A(-5; 7) \in \mathcal{C}_f$, on a de plus $f(-5) = 7$, ce qui donne

$$a(-5 + 1)^2 + 3 = 7, \text{ donc } 16a = 4, \text{ et } a = \frac{1}{4}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2 + 3$.

1G. Interrogation n° 1.
Correction du sujet 2

Exercice 7

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 8 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+5)^2 - 7$. Déterminer le tableau de variation de f . Justifier.

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = -5$ et $\beta = -7$.

Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. Le sommet est $S(-5; -7)$.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f(x)$		-7	

Exercice 9 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

$a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1$.

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3$.

Les solutions de l'équation sont 1 et 3.

2. $2x^2 + 5x - 3 = -3x - 11$ Cela revient à $2x^2 + 8x + 8 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (2) \times (8) = 0$.

L'équation admet une seule solution.

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \times 2} = -2$.

L'équation a une seule solution qui est -2 .

Exercice 10 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 7x + 7$. Mettre $f(x)$ sous forme canonique. Justifier.

$a = -2$, $b = -7$ et $c = 7$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-7)}{2 \times (-2)} = -\frac{7}{4}$.

$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{7}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \times \frac{-7}{4} + 7$

$\beta = \frac{-49 + 2 \times 49 + 56}{8} = \frac{105}{8}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{105}{8}$.

Exercice 11 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 55x \leq 0$.

$x^2 + 55x = 0$ ssi $x(x + 55) = 0$ ssi $(x = 0 \text{ ou } x = -55)$.

Les racines sont 0 et -55 .

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, avec ici $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	-55	0	$+\infty$	
$x^2 + 55x$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pour $x^2 - 55x \leq 0$, $S = [-55; 0]$.

Exercice 12 (Bonus, 1 point)

Voir le sujet 1.