Seconde 2. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 12

Exercice 1 (cours : 4 points)

1. Donner le tableau de variation de la fonction carré.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. Donner le tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3. Compléter.

(a) Pour tous événements A et B,
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(b) Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exercice 2 (5 points)

1. Soit le réel $a = 2 - \frac{2}{3}$. Mettre a, puis a^2 et $\frac{1}{a}$ sous forme de fraction irréductible.
$a = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$. Donc $a^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, et $\frac{1}{a} = \frac{3}{4}$.

2. Résoudre les équations suivantes. Justifier.

(a) $4x^2 - 1 = 0$
$4x^2 - 1 = 0$ ssi $x^2 = \frac{1}{4}$ ssi $\left(x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ou } x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}\right)$.
$\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}.}$

(b) $\frac{1}{x} = -3x$
Soit $x \neq 0$.
$\frac{1}{x} = -3x$ ssi $x^2 = -\frac{1}{3}$.
Or, un carré est toujours positif.
$\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution.}}$

3. Soit un réel x tel que $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
Donner le meilleur encadrement de x^2. Justifier la réponse.
La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3; 2]$.

x	-3		0		2
x^2	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Sur cet intervalle, son minimum est 0 et son maximum est 9.
$\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$

4. Donner un réel b vérifiant $-3 < \frac{1}{b} < -2$. Aucune justification n'est demandée.
$\boxed{\text{Par exemple, } b = -\frac{1}{2,6} = -\frac{5}{13} \text{ convient.}}$

Exercice 3 (5 points)

Une enquête nous apprend que sur 400 ménages, 80 ont au moins un chien, 100 ont au moins un chat, et 20 ont à la fois au moins un chien et un chat.

1. Compléter le tableau des effectifs suivant :

	Au moins un chien	Pas de chien	Total
Au moins un chat	20	**80**	100
Pas de chat	**60**	**240**	**300**
Total	80	**320**	400

2. On choisit un ménage au hasard. Tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis. On note :
A : « Le ménage a au moins un chien » ;
B : « Le ménage a au moins un chat » ;
et $\overline{A}$, $\overline{B}$ leurs événements contraires.

(a) Calculer $P(A)$. Justifier.
D'après l'énoncé, « Tous les ménages ont la même probabilité d'être choisis ». Il y a donc équiprobabilité.
On calcule les probabilités des événements par la formule $\frac{nb\ de\ cas\ favorables}{nb\ de\ cas\ total}$.
$\boxed{P(A) = \frac{80}{400} = 0.2.}$

(b) Calculer $P(B)$.
$\boxed{\text{De même, } P(B) = \frac{100}{400} = 0.25.}$

(c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.

$A \cap B$: « Le ménage a au moins un chien et au moins un chat ».

$P(A \cap B) = \dfrac{20}{400} = 0.05.$

(d) Définir par une phrase l'événement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

$A \cup B$: « Le ménage a au moins un chat ou au moins un chien ».

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.2 + 0.25 - 0.05 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Donc la probabilité que le ménage ait un chat ou un chien est 0.4.

(e) Exprimer à l'aide des données de l'énoncé l'événement : « Le ménage n'a ni chien ni chat ». Calculer la probabilité de cet événement.

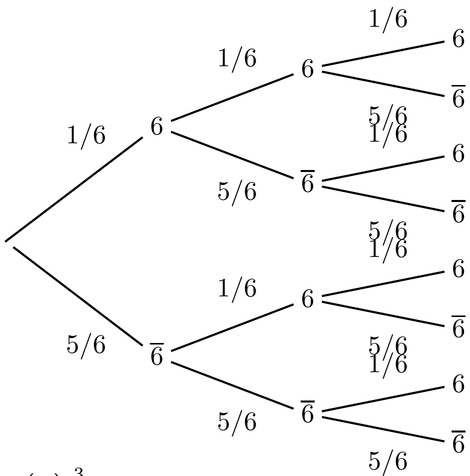
L'événement « Le ménage n'a ni chien ni chat » correspond à $\overline{A} \cap \overline{B}$.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{240}{400} = 0.6.$

Autre méthode :
On peut remarquer que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
D'où $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Exercice 4 (2 points)

On lance un dé cubique équilibré trois fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 ? Justifier.
Notons A : "on obtient au moins un 6".
Alors $\overline{A}$: "on n'obtient aucun 6"



$P(\overline{A} = P(\overline{6}; \overline{6}; \overline{6}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216}.$

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}.$

La probabilité d'obtenir au moins un 6 sur 3 lancers est de $\dfrac{91}{216}$ soit environ 0,42.

Exercice 5 (4 points)

Dans un repère du plan, on considère la droite d d'équation

$$x - 2y - 3 = 0.$$

1. Étudier par le calcul si points suivants appartiennent à d : $A(-1; 2)$, et $B(11; 4)$.
   $-1 - 2 \times 2 - 3 = -8 \neq 0.$ Donc $A \notin d$.
   $11 - 2 \times 4 - 3 = 11 - 11 = 0.$ Donc $B \in d$.
2. Déterminer les coordonnées du point de d d'abscisse égale à 7.
   Comme $C(7; y) \in d$, les coordonnées vérifient l'équation, soit $7 - 2y - 3 = 0$, puis $-2y + 4 = 0$, et $y = 2$.
   Le point de d qui a une abscisse égale à 7 est $C(7; 2)$.
3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d.
   Avec le cours, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-b; a)$.
   Ainsi, $\overrightarrow{u}(2; 1)$ est un vecteur directeur de d.
   Méthode 2 : $B(11; 4)$, et $C(7; 2)$ appartiennent à d, donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d.
   $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$, puis $\overrightarrow{BC}(-4; -2)$
   On vérifie facilement que ces 2 vecteurs sont colinéaires, $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{u}$.
4. On considère les points $E(5; -3)$ et $F(-4; 1)$.
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (EF).
   Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dirige la droite (EF).
   $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$, soit $\overrightarrow{EF}(-9; 4)$.
   $\overrightarrow{EF}(-9; 4)$ est un vecteur directeur de la droite (EF).
   (b) Les droites (EF) et d sont-elles parallèles ? Justifier.
   On étudie si les vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}(2; 1)$ et $\overrightarrow{EF}(-9; 4)$ sont colinéaires.
   $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{EF}) = xy' - yx' = 2 \times 4 - 1 \times (-9) = 17 \neq 0.$
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc les droites (EF) et d ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.