Exercices sur les équations différentielles du 1er ordre
Fiche n° 3

Exercice 13
Soit (E) l'équation $y' + y = x$, où y est une fonction dérivable de la variable x sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Déterminer une solution particulière sous la forme d'une fonction affine g définie par $g(x) = ax + b$.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 0$.
5. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; 2]$. On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Exercice 14
Soit (E) l'équation $6y' - 2y = 4x^2 - 5$.

1. Résoudre l'équation (E). On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynome du second degré.
2. Déterminer la solution vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 15
Soit (E) l'équation $x' - 4x = 2\mathrm{e}^{3t}$, où x est une fonction de la variable réelle t dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une solution particulière sous la forme $g(t) = k\mathrm{e}^{3t}$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière vérifiant $x(0) = 0$.

Exercice 16
Soit (E) l'équation $y' + 3y = \cos t - \sin t$.
Résoudre (E). On cherchera une solution particulière sous la forme $g(t) = a \cos t + b \sin t$.

Exercice 17
Soit (E) : $5y' - y = (3x - 1)\mathrm{e}^{2x}$.

1. Trouver une solution particulière sous la forme $g(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$
2. En déduire la résolution de (E).

Exercice 18
Soit (E) l'équation différentielle $2y' - 3y = 5 \cos(2x)$.

1. Résoudre (E). Pour une solution particulière, on cherchera une fonction de la forme $g(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$.
2. Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 19 (Méthode d'Euler en Python)
Cette méthode est utilisée pour approcher la représentation graphique d'une fonction f dont on connaît une valeur particulière $f(t_0)$ et une relation donnant $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ et t.
Nous supposerons dans cet exercice que

$$f(0) = 1 \text{ et que } f'(t) = t^2 - t \times f(t).$$

La méthode repose sur le résultat suivant :
Pour h voisin de 0, $f'(t) \approx \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$, soit

$$f(t+h) \approx f(t) + h \times f'(t). \text{ (approximation affine).}$$

Pour h voisin de 0, on prend :

* $t_0 = 0$ et $y_0 = f(t_0) = 1$.
* $t_1 = t_0 + h$, et $y_1 = y_0 + h \times (t_0^2 - t_0 y_0)$. Alors, $y_1 \approx f(t_1)$
* $t_2 = t_1 + h$, et $y_2 = y_1 + h \times (t_1^2 - t_1 y_1)$. Alors, $y_2 \approx f(t_2)$
* ...
* $t_{k+1} = t_k + h$, et $y_{k+1} y_k + h \times (t_k^2 - t_k y_k)$. Alors, $y_{k+1} \approx f(t_{k+1})$
* ...

On considère l'algorithme suivant :

```
def euler(n,h):
    import matplotlib.pyplot as plt
    import numpy as np
    t=[0]
    y=[1]
    for k in range(n):
        t.append(t[k]+h)
        y.append(y[k]+h*(t[k]**2-t[k]*y[k]))
    plt.plot(t,y)
    plt.show()

Dans la console,  euler(100,0.01)
```

1. Tester cet algorithme. Préciser le résultat obtenu.
2. Modifier cet algorithme afin qu'il trace une représentation graphique approchée sur $[0; 10]$ de la solution de l'équation différentielle $y'(t) + (1 + t)y(t) = \mathrm{e}^{1-t}$, avec $y(0) = 1$, à l'aide de 10001 points.