Correction du devoir maison n° 5

Exercice 1 (Métropole, juin 2017)
Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 12x^2 + 65,625x + 20.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,8]$
   $f'(x) = 0{,}5(3x^2) - 12(2x) + 65{,}625 = 1{,}5x^2 - 24x + 65{,}625.$
2. On admet que : $f'(x) = (x - 3,5)(1,5x - 18,75)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,8]$.

   Complétons le tableau de signes suivant, afin d'étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\,;\,8]$.

   Sur $\mathbb{R}$, $x - 3{,}5 > 0 \iff x > 3{,}5$

   Sur $\mathbb{R}$, $1{,}5x - 18{,}75 > 0 \iff x > 12{,}5$ par conséquent pour tout $x \in [0\ ;\ 8]$, $1{,}5x - 18{,}75 < 0$

x	0		3,5		8
$x - 3,5$		$-$	0	$+$	
$1,5x - 18,75$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. Construisons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$.

   Étudions d'abord le sens de variation de la fonction f.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

   Sur $[0\ ;\ 3{,}5[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

   Sur $]3{,}5\ ;\ 8]$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

   Construisons le tableau de variation de f sur $[0\,;\,8]$.

x	0		3,5		8
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de $f(x)$	20	$\nearrow$	124,125	$\searrow$	33

On fera apparaître les valeurs de la fonction f aux bornes de l'intervalle ainsi qu'aux éventuels changements de variation.

Partie B : Application

L'OMS a fixé à 50 milligrammes par litre (mg/L) la concentration limite de nitrates dans l'eau destinée à la consommation, considérant qu'au-delà il y a des risques pour la santé.
Suite à un incident industriel, une importante quantité de nitrates a été déversée dans un cours d'eau sur lequel se situe un point de captage pour l'alimentation d'une ville.
Un expert indépendant est alors consulté afin de prévoir l'évolution du taux de nitrates dans ce cours d'eau au niveau du point de captage pendant les 8 jours suivant l'incident.

L'expert décide de modéliser le taux de nitrates, x jours après le début de l'incident, à l'aide de la fonction f étudiée en **partie A**.

1. D'après ce modèle, le taux maximal de nitrates atteint pendant la phase de surveillance de 8 jours est de 124,125 mg/L, maximum atteint par la fonction f pour $x = 3{,}5$.
2. En cas d'incident, un décret impose de fermer le point de captage pendant 8 jours.

   D'après le modèle choisi par l'expert, au terme des 8 jours après le début de l'incident, la concentration des nitrates est dans les conditions fixées par l'OMS puisqu'il y aura alors une concentration de 33 mg/L. Ceci est inférieur à 50 mg/L.

Exercice 2 (Nouvelle Calédonie, nov 2013)

Partie A

Un laborantin souhaite tester l'efficacité d'un médicament M.
À l'instant $t = 0$, il injecte à un malade une dose de 2 ml de ce médicament et il étudie la quantité de médicament présent dans le sang au bout de t heures.
Il s'aperçoit alors que cette quantité diminue de 12 % par heure.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en ml, de médicament présent dans le sang au bout de n heures.
On a alors $u_0 = 2$.

1. Calculons u_1 et u_2. Le coefficient multiplicateur associé à une évolution au taux t est $1 + t$. Pour une diminution de 12 %, le coefficient multiplicateur est donc 0,88.

   $u_1 = 2 \times 0{,}88 = 1{,}76$; $u_2 = 1{,}76 \times 0{,}88 = 1{,}548\,8$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}88 \times u_n$.
3. Puisque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un même nombre, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,88.
4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$ donc $u_n = 2 \times (0{,}88)^n$.
5. Calculons la quantité de médicament présent dans le sang au bout de 10 heures.

   Pour $n = 10$ nous obtenons $u_{10} = 2 \times 0{,}88^{10} \approx 0{,}557$.

   Au bout de 10 heures, la quantité de médicament présent dans le sang est d'environ 0,56 ml au centième près.

Partie B

On note, dans cette partie, $f(t)$ la quantité de médicament présent dans le sang au bout de t heures, t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,24]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée en **annexe**.

1. Déterminons graphiquement une valeur approchée de la quantité de médicament présent dans le sang au bout de 15 heures. Pour ce faire, lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 15.

   Avec la précision du graphique, nous lisons 0,29.

   Au bout de 15 heures, la quantité de médicament présent dans le sang est d'environ 0,29 ml.
2. Résolvons graphiquement l'inéquation $f(t) < 0,2$. Traçons la droite d'équation $y = 0{,}2$ et lisons les abscisses des points pour lesquels la courbe se situe strictement en dessous de cette droite. Nous obtenons $]18\,;\,24]$
3. On admet que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,24]$, $f(t) = 2 \times (0,88)^t$. Vérifions par le calcul les résultats des questions 1. et 2. $f(15) = 2 \times (0{,}88)^{15} \approx 0{,}29$. Résolvons $f(t) < 0{,}2$. $2 \times 0,88^t < 0,2$.
   La suite $(2 \times 0,88^n)$ est décroissante (car $0 < 0,88 < 1$), et l'on observe à la calculatrice que :
   $2 \times 0,88^{18} \approx 0,2003 > 0,2$.
   $2 \times 0,88^{19} \approx 0,1763 < 0,2$.
   Donc peu après 18 heures, la quantité de médicament présent dans le sang est inférieure à 0,2 ml. Les résultats graphiques sont cohérents avec ceux obtenus par le calcul.