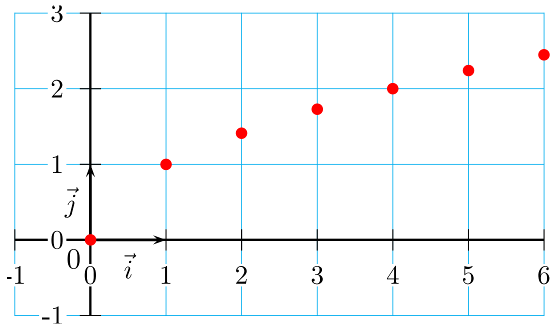
Chapitre 10 : Suites numériques – 2e partie
Variations et notion de limite

I Suite croissante, suite décroissante

Définition
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :
- la suite (u_n) est croissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$,
- (u_n) est décroissante si pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$,
- (u_n) est constante si pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque (suite strictement croissante, ou strictement décroissante)
En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on définit une suite (u_n) strictement croissante, strictement décroissante :
(u_n) est strictement croissante si pour tout entier n, $u_{n+1} > u_n$.
(u_n) est strictement décroissante si pour tout entier n, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est croissante.



Remarque
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.
Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.
En effet, si n est pair $u_n = 1$, et si n est impair $u_n = -1$.
Ainsi, $u_0 = u_2 = 1$, et $u_1 = -1$.
Comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante.
Comme $u_2 > u_1$, elle n'est pas non plus décroissante.

Remarque
Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, ou pas décroissante, il suffit de donner un contre-exemple.

Exercice 1 (corrigé)
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 7n + 1$ n'est ni croissante, ni décroissante.
On a $u_0 = 1$, $u_1 = -3$, et $u_2 = -1$.
Comme $u_1 < u_0$, (u_n) n'est pas croissante.
Et comme $u_2 > u_1$, (u_n) n'est pas non plus décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à (u_n) croissante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ équivaut à (u_n) décroissante.

2. Seulement pour les suites définies par terme général $u_n = f(n)$ (formule explicite), on peut étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$, par exemple en dérivant.
   Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
   Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
3. Dans le cas des suites à termes strictement positifs, on peut aussi former le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 (utile lorsqu'il y a des puissances).
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est croissante.
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 2 (corrigé)
Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
   Méthode 1 :
   On sait que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc (u_n) est strictement croissante.
   Méthode 2 :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ (car n est un entier naturel).
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
   La suite (u_n) est strictement croissante.
2. $V_0 = 5$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n - \dfrac{2}{3+n^2}$.
   On étudie le signe de $V_{n+1} - V_n$.
   Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = -\dfrac{2}{3+n^2} < 0$ (car $3 + n^2 > 0$).
   Donc, pour tout n, $V_{n+1} < V_n$, et la suite (V_n) est strictement décroissante.
3. Pour tout entier n, $W_n = \dfrac{2}{6n+1}$.
   Méthode 1 :
   On pose $f(x) = \dfrac{2}{6x+1}$ et on étudie les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   $6x + 1$ ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$, donc f est dérivable sur cet intervalle.
   Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2 \times \dfrac{-6}{(6x+1)^2} = -\dfrac{12}{(6x+1)^2} < 0$.
   Donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, et la suite (W_n) est strictement décroissante.
   Méthode 2 :
   On étudie le signe de $W_{n+1} - W_n$.
   Pour tout entier n,
   $W_{n+1} - W_n = \dfrac{2}{6(n+1)+1} - \dfrac{2}{6n+1} = \dfrac{2}{6n+7} - \dfrac{2}{6n+1} = \dfrac{2(6n+1) - 2(6n+7)}{(6n+1)(6n+7)} = \dfrac{-12}{(6n+1)(6n+7)} < 0$.
   Donc (W_n) est strictement décroissante.

Exercice 3
Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5$ et de raison -3.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = (a_n - 3) - a_n = -3 < 0$.
   Ou bien :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + nr = 5 - 3n$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = 5 - 3(n+1) - (5 - 3n) = 5 - 3n - 3 - 5 + 3n = -3 < 0$.
   $\boxed{\text{Donc } (a_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

Autre méthode : C'est la suite associée à la fonction affine $f(x) = -3x + 5$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur est $a = -3 < 0$.

2. (b_n) est définie par $b_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = b_n - (n-3)^2$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = -(n-3)^2 \leqslant 0$ (car un carré est toujours positif ou nul).
   $\boxed{\text{Donc } (b_n) \text{ est décroissante.}}$
3. Pour tout entier n, $c_n = n^3 - 9n^2$.
   $c_0 = 0$, $c_1 = 1^3 - 9 \times 1^2 = 1 - 9 = -8$.
   $c_9 = 9^3 - 9 \times 9^2 = 0$, et $c_{10} = 10^3 - 9 \times 10^2 = 1000 - 900 = 100$.
   Comme $c_1 < c_0$, la suite n'est pas croissante.
   Comme $c_{10} > c_9$, la suite n'est pas décroissante.
   $\boxed{\text{Donc } (c_n) \text{ n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).}}$
4. (d_n) est la suite géométrique de premier terme $d_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 \times q^n = 1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^n}$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $d_{n+1} - d_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{3}{3^{n+1}} = \dfrac{-2}{3^{n+1}} < 0$.
   En effet, $3^{n+1} = 3^n \times 3$.
   $\boxed{\text{Donc la suite } (d_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

II Suite majorée, suite minorée

Définition
On dit qu'une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leqslant M$ (le nombre M est un majorant de la suite).
On dit qu'une suite (u_n) est minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout entier n on ait $u_n \geqslant m$ (m est un minorant de la suite).
Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Remarque
Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 4 (corrigé)
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ est croissante et majorée par 7.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sens de variation
Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7(n+1)-1}{n+1+2} - \dfrac{7n-1}{n+2} = \dfrac{7n+6}{n+3} - \dfrac{7n-1}{n+2}$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(7n+6)(n+2) - (7n-1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)} > 0$.
En effet, n est en entier naturel, donc $n+2 > 0$, et $n+3 > 0$.
Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} > u_n$.
(u_n) est strictement croissante.

Majoration par 7
Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n - 7 = \dfrac{7n-1}{n+2} - \dfrac{7(n+2)}{n+2} = \dfrac{-15}{n+2} < 0$.
De même, n est un entier naturel, donc $n+2 > 0$.
Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 7$.

Encadrement de (u_n)
Toute suite croissante est minorée par son 1er terme.

Ici, $u_0 = -0,5$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-0,5 \leqslant u_n < 7$. La suite (u_n) est bornée.

Exercice 5
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1-2n}{n+5}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   Pour tout $n \geqslant 0$,
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-2(n+1)}{n+1+5} - \dfrac{1-2n}{n+5}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2n-1}{n+6} - \dfrac{1-2n}{n+5}$.
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-2n-1)(n+5)-(1-2n)(n+6)}{(n+5)(n+6)}$
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2n^2-11n-5-(-2n^2-11n+6)}{(n+5)(n+6)}$
   $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{11}{(n+5)(n+6)} < 0$.
   En effet, n est en entier naturel, donc $n+5 > 0$, et $n+6 > 0$.
   Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.
   $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$
2. Justifier qu'elle est minorée par -2.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n - (-2) = u_n + 2 = \dfrac{1-2n}{n+5} + \dfrac{2(n+5)}{n+5} = \dfrac{11}{n+5} > 0$.
   De même, n est un entier naturel, donc $n+5 > 0$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u_n > -2.\ (u_n) \text{ est minorée par } -2.}$
3. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout entier n.
   Toute suite décroissante est majorée par son 1er terme.
   Ici, $u_0 = \dfrac{1}{5}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ -2 < u_n \leqslant \frac{1}{5}. \text{ La suite } (u_n) \text{ est bornée.}}$

III Variation des suites arithmétiques et géométriques

Propriété (variation des suites arithmétiques)
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
2. (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
3. (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Démonstration
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (par définition).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ssi $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ssi $r > 0$.
Et $u_{n+1} - u_n < 0$ ssi $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ssi $r > 0$. □

Remarque
Une suite arithmétique est donc toujours monotone.
On fait le lien avec le sens de variation des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ puisque les suites arithmétiques sont la restriction à $\mathbb{N}$ des fonctions affines.

Propriété (variation de (q^n))
Soit q un nombre réel tel que $q \neq 0$ et $q \neq 1$.

1. Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
3. Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).

Démonstration
Si $q < 0$, alors la suite (q^n) est alternée (chaque terme est de signe contraire du prédédent), donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.
Sinon, $q > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n = q^n \times q - q^n = q^n(q-1)$.
Si $0 < q < 1$, $q - 1 < 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Par produit, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) < 0$, et la suite est strictement décroissante.
Si $q > 1$, alors $q - 1 > 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Alors, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) > 0$, et la suite est strictement croissante. $\square$

Conséquence
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$ et différente de 1.

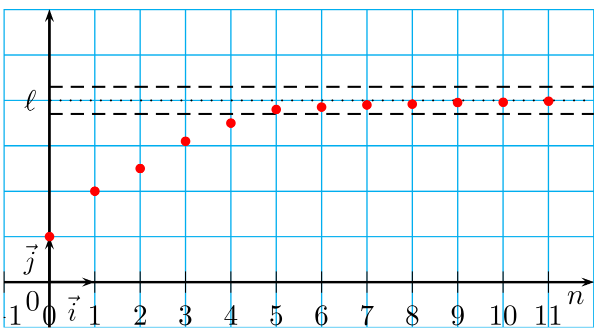
1. Si $q > 1$ alors (u_n) est strictment croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

IV Notion de limite

IV.1 Suite convergeant vers un nombre réel ℓ

Définition
Soient (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.
On dit que (u_n) admet pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit il) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = \ell$.

Illustration :
Le graphique ci-dessous représente une suite (u_n) qui converge vers $\ell = 4$.
L'intervalle ouvert contenant 4 est ici $]3,7;4,3[$.



Remarque
$\lim u_n = \ell$ signifie que tous les termes de la suite u_n deviennent "infiniment proches" de ℓ lorque n devient très grand.
Il est inutile de préciser $n \to +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.
On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Théorème (admis)
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Remarque
Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).
La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite, elle est divergente.

Exemple :
$\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ où k est un entier supérieur où égal à 1 sont des suites convergeant vers 0.

IV.2 Suites ayant une limite infinie

Définition
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = +\infty$.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si tout intervalle du type $]-\infty; A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = -\infty$.

Exemple :
$\lim n^2 = +\infty$; $\lim n^3 = +\infty$; $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

V Recherche de seuil

V.1 Exemple avec une suite divergeant vers $+\infty$

Exemple :
Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.
On sait que (u_n) est croissante (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$).
De plus, en calculant quelques termes ($u_{100} = 10000$, $u_{1000} = 1000000 = 10^6$), on peut conjecturer qu'elle diverge vers $+\infty$.
On cherche le plus petit entier n tel que $n^2 \geqslant 10^7$.
On utilise un algorithme de seuil.

Langage naturel

```
n prend la valeur 0
U prend la valeur n^2
Tant que U < 10^7,
   n prend la valeur n+1
   U prend la valeur n^2
Fin Tant que
Afficher n
```

Fonction Python associée

```
def seuil():
   n=0
   U=n**2
   while U<10**7:
      n=n+1
      U=n**2
   return(n)
```

On obtient $N = 3163$.
Cela signifie que le plus petit entier n tel que $n^2 \geqslant 10^7$ est $n = 3163$.
En outre comme la suite (n^2) est croissante, on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 3163$, $n^2 \geqslant 10^7$.
Les entiers n pour lesquels $n^2 \geqslant 10^7$ sont donc tous les entiers à partir de 3163.

Remarque
Sur cet exemple (simple), on pouvait aussi résoudre l'inéquation $n^2 \geqslant 10^7$.
Comme n est un entier positif, cela implique $n \geqslant \sqrt{10^7} \approx 3162,3$.
Le plus petit entier qui convient est donc 3163.

Commentaire
De façon générale, dans un algorithme de seuil, on utilise une boucle non bornée (Tant que), et la condition du test est la négation de la condition demandée dans la question.
Sur l'exemple précédent, on cherche le plus petit entier n tel que $n^2 \geqslant 10^7$, et dans l'algorithme, Tant que $U < 10^7$.

Exercice 6
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times \sqrt{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.
   Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^4$.
3. Programmer l'algorithme à la calculatrice ou Python et donner la valeur de n_0.

V.2 Exemple avec une suite convergente

Exercice 7 (corrigé)
On considère la suite (A_n) définie par $A_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = \dfrac{1}{3}A_n + 4$.

1. Calculer A_1 et A_2.
   $A_1 = \dfrac{1}{3}A_0 + 4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{12}{3} = \dfrac{13}{3}$. $A_2 = \dfrac{1}{3}A_1 + 4 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{13}{3} + 4 = \dfrac{13}{9} + \dfrac{36}{9} = \dfrac{49}{9}$.
2. Écrire un l'algorithme qui renvoie A_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné en entrée, puis donner une valeur approchée de A_8 arrondie à 10^{-4} près.

   Algorithme
   ```
   Entrer N
   A prend la valeur 1
   Pour K allant de 1 à N
      A prend la valeur 1/3 A+4
   Fin Pour
   Afficher A
   ```

   Fonction Python Associée
   ```
   def termesuite(n) :
      A=1
      for k in range(1,n+1):
         A=1/3*A+4
      return(A)
   ```

   $A_8 \approx 5,9992$.
3. On admet que la suite (A_n) converge vers 6.
   (a) Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|A_{n_0} - 6| < 10^{-7}$.

   Algorithme
   ```
   N prend la valeur 0
   A prend la valeur 1
   Tant que |A − 6| ⩾ 10^(−7)
      N prend la valeur N + 1
      A prend la valeur 1/3 A + 4
   Fin Tant que
   Afficher N
   ```

   Fonction Python Associée
   ```
   def seuil():
      n=0
      A=1
      while abs(A-6)>=10**(-7):
         n=n+1
         A=1/3*A+4
      return(n)
   ```

   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice ou Python et indiquer la valeur de n_0.
   On trouve $n_0 = 17$.

Remarque
L'inégalité $|A_n - 6| < 10^{-7}$ signifie que l'écart entre A_n et 6 est strictement inférieur à 10^{-7} (la valeur absolue permet de ne pas se soucier de savoir si A_n est plus grand ou plus petit que 6).