

Chapitre 8 : Suites arithmétiques.

Suites géométriques

I Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre r . Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.

On a donc la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

Exercice 1

Chercher le 4^e terme de la suite arithmétique (u_n) de raison -7 et de premier terme $u_0 = 10$.

Remarque

Une suite (u_n) est arithmétique ssi $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Pour étudier si une suite (u_n) est arithmétique, on peut étudier si $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Théorème (Terme général d'une suite arithmétique de raison r)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r .

Alors, pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_0 + nr$.

Si (u_n) a pour premier terme u_1 , alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Remarque

On a aussi une formule pour exprimer u_n à partir d'une terme u_p quelconque :

Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Exercice 2

La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_{2012} .

Remarque

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
 (u_n) est croissante ssi $r \geq 0$, et décroissante ssi $r \leq 0$.
2. Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.
C'est la restriction à \mathbb{N} d'une fonction affine.

Propriété (Somme des n premiers nombres entiers naturels)

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Démonstration

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_n = n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre, il vient

$$2 \times S_n = (1+n) + (2+n-1) + \dots + (n-1+2) + (n+1)$$

$$2 \times S_n = n \times (n+1), \text{ donc } S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si le premier terme est u_0 , alors pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

2. En partant de u_1 , on a pour tout $n \geq 1$,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

3. De façon générale, pour la somme des termes consécutifs :

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \dots + n) \\ &= (n+1)u_0 + \frac{rn(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2} \\ &= (n+1)\frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \\ &= \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1) \end{aligned}$$

Remarque (utile pour des calculs de sommes arithmétiques)

Soit $a + \dots + A$ une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r > 0$.

Alors, la somme contient $\frac{A-a}{r} + 1$ termes.

Exercice 3

1. Calculs de termes d'une suite arithmétique :

[ressource 26](#)

[ressource 1275](#)

[ressource 1276](#)

2. Terme général d'une suite arithmétique :

[ressource 29](#)

[ressource 1278](#)

[ressource 1279](#)

3. Somme des premiers termes consécutifs : [ressource 1298](#)

4. Somme de termes consécutifs : [ressource 1299](#)

II Suites géométriques

Définition

Une suite géométrique est une suite où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre non nul q appelé la raison.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 sont les premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 (ce sont les puissances successives de 2).

Remarque

1. Si $q > 0$, les termes de la suite (u_n) sont tous de même signe (le signe du premier terme).
2. Si $q < 0$, les signes des termes de la suite alternent.

Théorème (Terme général d'une suite géométrique)

Soit (u_n) la suite géométrique de raison q .

1. Si le premier terme est u_0 , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_1 , alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque

À partir d'un terme u_p quelconque,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = -\frac{1}{3}$. Calculer u_5 .

Théorème (Somme des premières puissances entières d'un nombre)

Soient q un nombre réel et n un nombre entier, $n \geq 1$.

1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes}} = n + 1$.

Démonstration

1. On suppose $q \neq 1$. Notons $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$.
Si on multiplie cette égalité par q , on obtient $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$.
En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

Ainsi (on peut diviser puisqu'on suppose $q \neq 1$), $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

2. Evident.

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . On suppose $q \neq 1$.

1. Si le premier terme est u_0 , alors $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si le premier terme est u_1 , alors $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

On retiendra :

$$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Application :

Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 256$.

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^8 = \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = \frac{1 - 512}{-1} = 511.$$

Exercice 5

1. Calculs de termes d'une suite géométrique :
[ressource 2501](#)
[ressource 2503](#)
[ressource 2504](#)
2. Terme général d'une suite géométrique :
[ressource 2506](#)
[ressource 2507](#)
3. Somme des premiers termes d'une suite géométrique : [ressource 2534](#)
4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique : [ressource 2535](#) [ressource 3844](#)
5. Lecture graphique du premier terme et de la raison :
[ressource 3846](#) [ressource 3845](#)

III Le symbole sigma Σ **Théorème (linéarité de la somme)**

Soient x_0, x_1, \dots, x_n ($n + 1$) nombres réels. Soient a et b des réels. alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (ax_i + b) &= \sum_{i=0}^n ax_i + \sum_{i=0}^n b \\ &= a \sum_{i=0}^n x_i + (n + 1) \times b \end{aligned}$$

IV Pourquoi suites « arithmétiques », et « géométriques » ?

Si (u_n) est une suite arithmétique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1} , u_n et u_{n+1} , le terme central est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

Si (u_n) est une suite géométrique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1} , u_n et u_{n+1} , le terme central est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$$

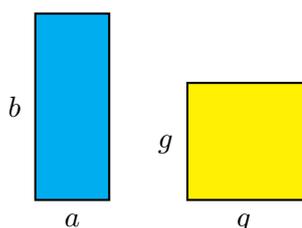
IV.1 Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels. La moyenne arithmétique de a et de b est $m = \frac{a+b}{2}$

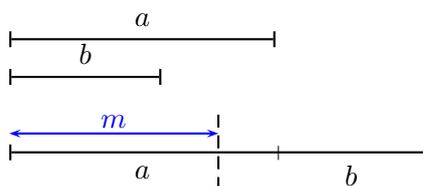
La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est $g = \sqrt{ab}$.

Le carré de côté g a la même aire que le rectangle de dimensions a et b (d'où moyenne « géométrique »).

En effet, $g^2 = ab$.

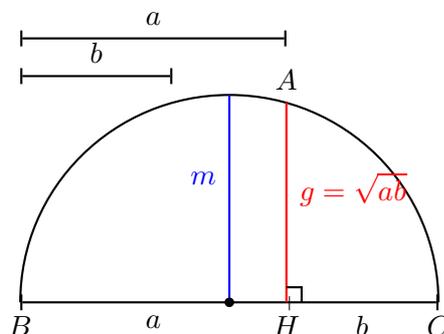


IV.2 Construction de la moyenne arithmétique à la règle et au compas



Pour la moyenne arithmétique, il suffit de tracer la médiatrice du segment de longueur $a + b$ pour diviser la longueur $a + b$ en deux parties égales. $m = \frac{a+b}{2}$.

IV.3 Construction de la moyenne géométrique à la règle et au compas



On trace le cercle de diamètre $[BC]$, ($BC = a + b$). Le point A est sur le cercle, et donc ABC est rectangle en A .

Alors, la hauteur AH du triangle rectangle ABC est la moyenne géométrique de a et b .

$a = BH$, et $b = CH$. Pour montrer que $AH = \sqrt{BH \times CH}$, on montre que $AH^2 = BH \times CH$ (équivalent).

$$\begin{aligned}
 AH^2 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 &= 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 &= BH \times CH + BH \times CH - BH \times CH \\
 &= BH \times CH \\
 AH^2 &= ab \\
 AH &= \sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

Remarque

La figure précédente permet de visualiser le fait que la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique ($g \leq m$) et que $g = m$ uniquement lorsque $a = b$.