1re S. Correction du dm9

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel. Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ prenant les valeurs x_1, x_2, $\cdots$, x_n avec les probabilités p_1, p_2, $\cdots$, p_n.
   Soient a et b deux nombres réels.
   Montrer que $E(aX+b) = aE(X)+b$.
   Posons $Y = aX+b$.
   Ainsi, les valeurs prises par la variable Y sont $y_i = ax_i + b$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On va montrer que $E(Y) = aE(X)+b$.
   $$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \times (y_i) \\ E(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \times (ax_i + b) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ap_ix_i + \sum_{i=1}^{n} p_ib \\ &= a\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$
   En effet, on a $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Le nombre de repas servis par jours dans un restaurant scolaire est une variable aléatoire X d'espérance 500. Le coût d'un repas est de 4 euros et les coûts fixes journaliers sont de 100 euros.
   Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour le restaurant.
   Calculer $E(Y)$.
   On a $Y = 4 \times X + 100$.
   D'après la propriété précédente (linéarité de l'espérance),
   $E(Y) = E(4X+100) = 4 \times E(X) + 100 = 4 \times 500 + 100 = 2100$.
   En moyenne, la dépense totale journalière est de 2100 euros.

Exercice 2

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
   $1+5+50 = 56$. Il y a 56 billets gagnants.
   Il y a donc $N - 56$ billets non gagnants.

   (b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   $5000 - 5 = 4995$, $1000 - 5 = 995$, et $50 - 5 = 45$.
   Les valeurs possibles de X sont donc 4995 ; 995 ; 45 ; -5.

   (c) Déterminer, en fonction de N, la loi de probabilité de X.
   On a vu qu'il y a $N - 56$ billets perdants.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(X = 4995) = \dfrac{1}{N}$. $P(X = 995) = \dfrac{5}{N}$.
   $P(X = 45) = \dfrac{50}{N}$. $P(X = -5) = \dfrac{N-56}{N}$.
   La loi de X se résume donc par le tableau suivant :

x_i	4995	995	45	-5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{N}$	$\dfrac{5}{N}$	$\dfrac{50}{N}$	$\dfrac{N-56}{N}$

2. Justifier que l'espérance de X est donnée par $E(X) = \dfrac{12500}{N} - 5$.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i$.
   $E(X) = \dfrac{4995 \times 1 + 995 \times 5 + 45 \times 50 - 5 \times (N-56)}{N} = \dfrac{12500 - 5N}{N} = \dfrac{12500}{N} - 5$
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.

   (a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
   Le bénéfice de l'organisateur s'exprime par sa recette moins les coûts qui correspondent aux lots gagnants.
   On a donc $5 \times N - (5000 + 5 \times 1000 + 50 \times 50) = 2000$
   D'où $5N = 2000 + 12500$, puis $5N = 14500$, et $N = 2900$.
   La loterie compte 2900 billets.

   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   $E(X) = \dfrac{12500}{2900} - 5 = \dfrac{-20}{29} \approx -0,69$.

(c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».

$P(A) = P(X \geqslant 45) = 1 - P(X = -5) = 1 - \dfrac{2900 - 56}{2900} = \dfrac{56}{2900} = \dfrac{14}{725} \approx 0,019$.

Le joueur a environ 1,9% de chance de tomber sur un billet gagnant.

Exercice 3

On donne l'algorithme suivant :

```
DÉBUT
Entrer N
J prend la valeur 0
    Pour I allant de 1 à N
        affecter à A un entier aléatoire entre 1 et 6
        affecter à B un entier aléatoire entre 1 et 6
        C prend la valeur A + B
            Si C ⩽ 5
                Alors J prend la valeur J + 1
            Fin Si
    Fin Pour
Afficher J/N
FIN
```

1. Que fait cet algorithme ?
   Il simule la répétition de N lancers de 2 dés cubiques équilibrés. Il compte le nombre de fois où la somme des dés est inférieure ou égale à 5, et affiche la fréquence des sommes inférieures ou égales à 5 sur les N expériences.
2. De quelle valeur doit se rapprocher le nombre affiché lorsque N devient très grand ?
   On peut représenter l'expérience par un arbre ou un tableau à 2 entrées.
   Sur les 36 issues équiprobables, il y en a 10 qui donnent une somme inférieure ou égale à 5 :
   (1 ;1), (1 ;2), (1 ;3), (1 ;4), (2 ;1), (2 ;2), (2 ;3), (3 ;1), (3 ;2), (4 ;1).
   En notant C la somme des deux dés comme dans l'algorithme, on a donc
   $P(C \leqslant 5) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
   Lorsque N devient très grand, les fréquences affichées par l'algorithme devraient se rapprocher de la probabilité théorique qui est $\dfrac{5}{18}$.
3. On propose le jeu suivant :
   La mise est de 4 euros. On lance deux dés cubiques équilibrés.
   Si la somme des deux dés est inférieure ou égale à 5, on gagne 15 euros.
   Sinon, on perd la mise.
   (a) Adapter l'algorithme précédent pour qu'il simule N parties et affiche le gain (algébrique) total et le gain moyen du joueur en sortie, l'entier N étant donné en entrée.
   Notons X le gain algébrique du joueur.
   En tenant compte de la mise de 4 euros, les valeurs de X sont 11 et -4.

```
DÉBUT
Entrer N
X prend la valeur 0
    Pour I allant de 1 à N
        affecter à A un entier aléatoire entre 1 et 6
        affecter à B un entier aléatoire entre 1 et 6
        C prend la valeur A + B
            Si C ⩽ 5
                Alors X prend la valeur X + 11
            Sinon X prend la valeur X − 4
            Fin Si
    Fin Pour
Afficher X, X/N
FIN
```

   (b) Ce jeu est-il équitable ? Justifier.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i = 11 \times \dfrac{5}{18} - 4 \times \dfrac{13}{18} = \dfrac{55 - 52}{18} = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6} \neq 0$.
   Comme $E(X) \neq 0$, le jeu n'est pas équitable.
   Plus précisément, $E(X) > 0$ donc le jeu est à l'avantage du joueur.