Lycée Camille Pissarro — Lundi 12 Février 2018

Première S

Contrôle commun

de

Mathématiques

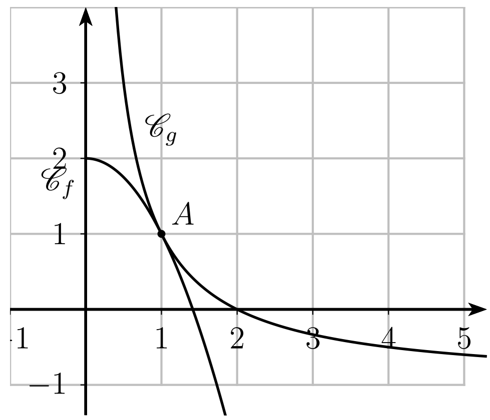
Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées.
L'activation du mode examen n'est pas requise.
Le sujet est composé de quatre pages numérotées de 1 à 4.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (2 points)
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. Pour tout $x > 8$, $g(x) = \dfrac{1}{16 - 2x}$.
2. Pour tout $x \in \left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$, $h(x) = \dfrac{x^3}{2x - 5}$.

Exercice 2 (2 points)
On donne ci-dessous la représentation graphique des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1$.
Il semble qu'elles admettent au point $A(1; 1)$ une tangente commune. Qu'en est-il ? Justifier.



Exercice 3 (6 points)
Soit f la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 2x + 2$.
3. Pour tout nombre réel a, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
   a) Déterminer a pour que T_a soit parallèle à la droite (d) d'équation
   $$y = -4x + 1.$$
   b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la tangente T_a a pour équation
   $$y = (-2a + 4)x + a^2 + 1.$$
   c) En déduire qu'il existe deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $K(3; 8)$.

Exercice 4 (5 points)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pout tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2 + 1}$.

1. Calculer u_1.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Par une méthode de votre choix, donner la valeur de u_{100} arrondie à 10^{-4} près. Expliquer la démarche.
4. Donner le plus petit entier p tel que $u_p < -6$. Expliquer la démarche.
5. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$? Justifier.

Exercice 5 (5 points)
On lance deux fois de suite une pièce déséquilibrée à Pile ou Face. À chaque lancer, la probabilité de faire Pile est de 0,4.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenu(s) après deux lancers de la pièce.

1. Représenter l'expérience par un arbre de probabilités.
2. a) Montrer que $P(X = 1) = 0,48$.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer en détaillant $E(X)$.
   d) Donner sans justification la valeur exacte de $V(X)$.
3. On propose le jeu suivant :
   La mise est de 10 euros et l'on récupère un montant proportionnel au nombre de Pile obtenu(s).
   a) *Dans cette question seulement,* on récupère 12 euros par pile obtenu.
   Par exemple, si la pièce tombe deux fois sur Pile, le joueur récupère $2 \times 12 = 24$ euros. Il gagne donc au final 14 euros.
   Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?
   b) Quel devrait-être le montant récupéré par le joueur pour chaque Pile obtenu pour que le jeu soit équitable ?

Le candidant pourra traiter, au choix, un seul des deux exercices suivants en bonus.

Exercice 6 (bonus, 3 points)
On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est indiquée ci-dessous :

x_i	7	22	27	77
$p(X = x_i)$	0,3	0,2	a	

1. En justifiant la démarche, trouver la valeur de a telle que $E(X) = 40$.
   On admet que la variance est alors $V(X) = 956$.
2. Recopier et compléter la loi de probabilité d'une variable Y vérifiant à la fois $V(Y) = 3824$ et $E(Y) = 0$.

y_i				
$p(Y = y_i)$	0,3	0,2		

Indication : $956 \times 4 = 3824$.

Exercice 7 (bonus, 3 points)
On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
2. Étude de la dérivabilité en 0.
   a) Soit $h > 0$. Exprimer le taux d'accroissement de f entre 0 et $0 + h$.
   b) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer $f'(0)$.