BTS. Exercices sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 1
Vérifier que la fonction f définie que $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x) + 2\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Exercice 2
Vérifier que la fonction f définie que $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{3x}$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' + 2y' - 3y = 0$
4. $y'' - 4y' + 8y = 0$
5. $4y'' - 12y' + 9 = 0$
6. $y'' - y = 0$
7. $y'' - 2y' + y = 0$
8. $y'' - 2y' + 3y = 0$

Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 17y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

Exercice 5
L'écart à sa position d'équilibre d'une masse oscillant sur un fluide élastique est une fonction du temps. Cette fonction définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ vérifie l'équation différentielle (dite des oscillations amorties)(E) : $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$, où y est exprimé en centimètres, et t est exprimé en secondes.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière qui s'annule en $t = 0$ et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

Exercice 6
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = x$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 2$ est une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente horizontale.

Exercice 7
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par les points $I(-1; 0)$ et $J(0; \frac{1}{2})$.

Exercice 8
L'étude d'un système mécanique soumis à un amortissement et à une excitation entretenue, conduit à la résolution de l'équation différentielle (E) suivante où y est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$: $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2t$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 2y' + 2y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 2\sin 2t - \cos 2t$ est une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f_1 de (E) vérifiant les conditions initiales $f_1(0) = 0 et f_1'(0) = 2$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x - 1$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une fonction affine g solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 10

On considère l'équation différentielle $(E) : x'' - 2x' - 3x = 3t^2 + 1$ où y est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une fonction particulière solution de (E) sous la forme d'une fonction polynôme de degré 2.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 11

On considère l'équation différentielle $(E) : i''(t)+4i'(t)+13i(t) = 4\sin(t)$ où i est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : i'' + 4i' + 13i = 0$.
2. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ soit une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution i de (E) vérifiant $i(0) = 0$ et $i'(0) = 2$.

Exercice 12

On considère l'équation différentielle $(E) : x''(t) + 9x(t) = 8\sin(t)$ où x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : x'' + 9x = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \sin(t)$ soit une solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution x de (E) vérifiant $x(0) = 0$ et $x'(0) = 4$.

Exercice 13

On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. On note y l'ordonnée du centre de gravité du plateau. On suppose que y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde.

L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction y est solution de l'équation différentielle $(E) : 5y'' + 6y' + y = 2$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 5y'' + 6y' + y = 0$.
2. Chercher une fonction constante qui soit une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 5$ et $y'(0) = 1$.
5. Pour la suite, on supposera que $y(t) = f(t)$ où f est la fonction définie qur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t} + 2$
   (a) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) En déduire l'évolution de l'ordonnée du centre de gravité en fonction du temps.
   (d) Calculer $\displaystyle\int_1^5 (f(t) - 2)\,\mathrm{d}t$.
   (e) Interpréter le résultat géométriquement sur le graphique.