2de. Correction du contrôle de mathématiques n° 2
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 1 point)

On appelle antécédent de y tout réel x de D tel que $y = f(x)$.

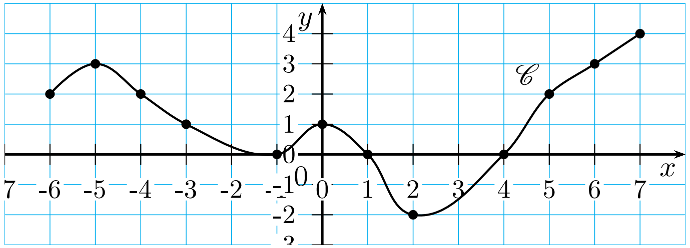
Exercice 2 (1,5 point)

Compléter le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$-7 \leqslant x \leqslant 1$	$[-7;1]$
$x > -1$	$]-1;+\infty[$
$x < 0$ ou $x \geqslant 4$	$]-\infty;0[\cup [4;+\infty[$

Exercice 3 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner sans justification :
   (a) L'ensemble de définition de f. $\boxed{f \text{ est définie sur } [-6;7].}$
   (b) L'image de 6 ; $\boxed{f(6) = 3}$
   (c) Les antécédents de 0 ; $\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont } -1\,;\,1\,;\,4.}$
   (d) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   $\boxed{\text{Elle a trois solutions.}}$
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 3. Les solutions sont -5 et 6.

3. Compléter (il y a plusieurs bonnes réponses possibles) :
   Le nombre **3** a deux antécédents par f (-1 convient aussi).
   Le nombre **0,5** a quatre antécédents par f.

Exercice 4 (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x - x^2$. Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan (on ne demande pas de la tracer).

1. Étudier si les points $A(2;14)$ et $B(-1;-8)$ appartiennent à la courbe de f.
   $f(2) = 9 \times 2 - 2^2 = 18 - 4 = 14$. $\boxed{\text{Donc } A \in \mathscr{C}.}$
   $f(-1) = 9 \times (-1) - (-1)^2 = -9 - 1 = -10 \neq -8$. $\boxed{\text{Donc } B \notin \mathscr{C}.}$
2. Déterminer les coordonnées du point de la courbe qui a pour abscisse -3.
   $f(-3) = 9 \times (-3)^2 - (-3)^2 = -27 - 9 = -36$.
   $\boxed{\text{Le point d'abscisse } -3 \text{ de } \mathscr{C} \text{ est } C(-3;-36).}$
3. Rechercher les antécédents de 0 par f.
   On résout l'équation $f(x) = 0$.
   $9x - x^2 = 0$ ssi $x(9 - x) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $9 - x = 0$) ssi ($x = 0$ ou $x = 9$).
   $\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont 0 et 9.}}$

Exercice 5 (3 points)

1. Mettre $A = \sqrt{245} - 2\sqrt{500} + 3\sqrt{180}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un nombre entier.
   $A = \sqrt{7^2 \times 5} - 2\sqrt{10^2 \times 5} + 3\sqrt{6^2 \times 5}$
   $A = 7\sqrt{5} - 2 \times 10\sqrt{5} + 3 \times 6\sqrt{5}$
   $A = 7\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 18\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.
2. Écrire le nombre sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$. $B = \left(\dfrac{21}{4^2}\right)^{-6} \times \left(\dfrac{35}{6}\right)^3$

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{21}{4^2}\right)^{-6} \times \left(\frac{35}{6}\right)^3 \\
&= \frac{21^{-6}}{4^{-12}} \times \frac{35^3}{6^3} \\
&= 3^{-6} \times 7^{-6} \times (2^2)^{12} \times 7^3 \times 5^3 \times 2^{-3} \times 3^{-3} \\
&= 2^{24-3} \times 3^{-6-3} \times 5^3 \times 7^{-6+3} \\
&= 2^{21} \times 3^{-9} \times 5^3 \times 7^{-3}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (1 point)
Donner l'arrondi à 10^{-3} et un encadrement d'amplitude 10^{-5} de $\sqrt{19}$.
Avec la calculatrice, $\sqrt{19} \approx 4,358\,898\,944$.

> L'arrondi à 10^{-3} près de $\sqrt{19}$ est $4,359$.
> Un encadrement d'amplitude 10^{-5} est $4,358\,89 < \sqrt{19} < 4,358\,90$.

Exercice 7 (2 points)
On ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de $\dfrac{1}{3}$ et l'on obtient 2. Quel est ce nombre ?
Soit x ce nombre.
$\dfrac{1+x}{3+x} = 2$ donc, par produit en croix, $1+x = 2(3+x)$, soit $1+x = 2x+6$, et $x = -5$.
Vérification : $\dfrac{1-5}{3-5} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

> Le nombre cherché est -5.

Exercice 8 (6 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x + 2$.

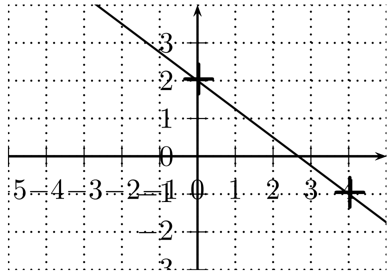
1. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
$f(-1) = -\dfrac{3}{4} \times (-1) + 2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{8}{4} = \dfrac{11}{4}$.
$f(2) = -\dfrac{3}{4} \times 2 + 2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer l'antécédent de 0 par f.
$-\dfrac{3}{4}x + 2 = 0$ ssi $x = -2 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$.

> L'antécédent de 0 par f est $\dfrac{8}{3}$.

3. Tracer la représentation graphique de f. Justifier.
Comme f est une fonction affine, la représentation graphique est une droite, il suffit donc de déterminer deux points.

x	0	4
$f(x)$	2	-1



4. Existe-t-il un nombre qui soit égal à son image par f ? Justifier.
$f(x) = x$ ssi $-\dfrac{3}{4}x + 2 = x$ ssi $\dfrac{7}{4}x = 2$ ssi $x = 2 \times \dfrac{4}{7}$ ssi $x = \dfrac{8}{7}$.

> Il existe un seul réel qui soit égal à son image par f : $\dfrac{8}{7}$.

5. Soit g la fonction affine dont la droite représentative passe par les points $A(-3;1)$ et $B(7;0)$.
   (a) Déterminer l'expression de $g(x)$.
   Il existe des réels a et b tels que $g(x) = ax + b$.
   $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-1}{7+3} = -\dfrac{1}{10}$.
   Donc $g(x) = -\dfrac{1}{10}x + b$.
   Comme $B(7;0) \in \mathscr{C}_g$, on a $g(7) = 0$, soit $-\dfrac{1}{10} \times 7 + b = 0$, et $b = \dfrac{7}{10}$.

   > Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{7}{10}$.

   (b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   $-\dfrac{3}{4}x + 2 = -\dfrac{1}{10}x + \dfrac{7}{10}$ ssi $\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{10}x = 2 - \dfrac{7}{10}$ ssi $\dfrac{15-2}{20}x = \dfrac{20-7}{10}$ ssi $\dfrac{13}{20}x = \dfrac{13}{10}$ ssi $x = \dfrac{13}{10} \times \dfrac{20}{13} = 2$.

   > La solution est 2.

Exercice 9 (bonus, 1 point)
Écrire sans racine carrée au dénominateur $\dfrac{3}{4-\sqrt{5}}$. Justifier.
On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée de $4-\sqrt{5}$ qui est $4+\sqrt{5}$.

> $\dfrac{3}{4-\sqrt{5}} = \dfrac{3(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})} = \dfrac{12+3\sqrt{5}}{4^2-5} = \dfrac{12+3\sqrt{5}}{11}$.

2de. Correction du sujet 2

Exercice 10

Pour tous réels a et b positifs ou nuls, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

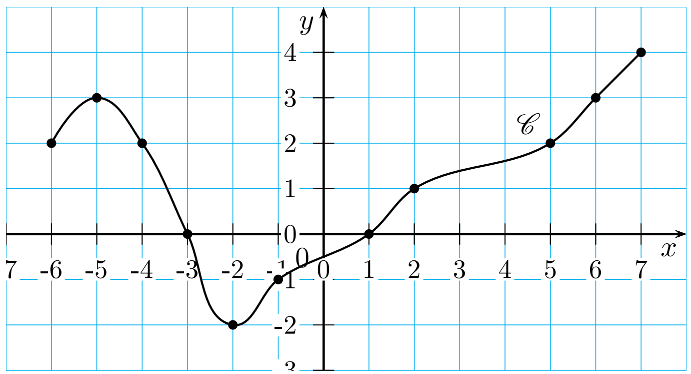
Exercice 11 (3 points)

Compléter le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$3 < x \leqslant 8$	$]-3;8]$
$x \geqslant -2$	$[-2;+\infty[$
$-1 \leqslant x \leqslant 3$ ou $x > 5$	$[-1;3] \cup]5;+\infty[$

Exercice 12 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner sans justification :
   (a) L'ensemble de définition de f. $\boxed{f \text{ est définie sur } [-6;7].}$
   (b) L'image de -4 ; $\boxed{f(-4) = 2.}$
   (c) Les antécédents de 3 ; $\boxed{\text{Les antécédents de 3 sont } -5 \text{ ; et 6.}}$
   (d) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
   $\boxed{\text{Elle a deux solutions.}}$

2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$. Expliquer la méthode.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 2. Les solutions sont -6 ; -4 et 5.

3. Compléter (il y a plusieurs bonnes réponses possibles) :
   Le nombre **1** a deux antécédents par f.
   Le nombre **4** a un seul antécédent par f.

Exercice 13 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x - x^2$. Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan (on ne demande pas de la tracer).

1. Étudier si les points $A(2;14)$ et $B(-1;-8)$ appartiennent à la courbe de f.
   $f(2) = 7 \times 2 - 2^2 = 14 - 4 = 10 \neq 14$. $\boxed{\text{Donc } A \notin \mathscr{C}.}$
   $f(-1) = 7 \times (-1) - (-1)^2 = -7 - 1 = -8$. $\boxed{\text{Donc } B \in \mathscr{C}.}$

2. Déterminer les coordonnées du point de la courbe qui a pour abscisse -3.
   $f(-3) = 7 \times (-3)^2 - (-3)^2 = -21 - 9 = -30$.
   $\boxed{\text{Le point d'abscisse } -3 \text{ de } \mathscr{C} \text{ est } C(-3;-30).}$

3. Rechercher les antécédents de 0 par f.
   On résout l'équation $f(x) = 0$.
   $7x - x^2 = 0$ ssi $x(7-x) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $7 - x = 0$) ssi ($x = 0$ ou $x = 7$).
   $\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont 0 et 7.}}$

Exercice 14 (3 points)

1. Mettre $A = \sqrt{192} - 2\sqrt{147} + 3\sqrt{300}$ sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un nombre entier.

   $A = \sqrt{8^2 \times 3} - 2\sqrt{7^2 \times 3} + 3\sqrt{10^2 \times 3}$
   $A = 8\sqrt{3} - 2 \times 7\sqrt{3} + 3 \times 10\sqrt{3}$
   $A = 8\sqrt{3} - 14\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

2. Écrire le nombre suivant sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$.

$B = \left(\dfrac{21}{4^{-3}}\right)^4 \times \left(\dfrac{6}{35}\right)^7$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{21}{4^{-3}}\right)^4 \times \left(\frac{6}{35}\right)^7 \\ &= \frac{21^4}{4^{-12}} \times \frac{6^7}{35^7} \\ &= 3^4 \times 7^4 \times (2^2)^{12} \times 2^7 \times 3^7 \times 7^{-7} \times 5^{-7} \\ &= 2^{24+7} \times 3^{4+7} \times 5^{-7} \times 7^{4-7} \\ &= 2^{31} \times 3^{11} \times 5^{-7} \times 7^{-3} \end{aligned}$$

Exercice 15 (1 point)

Donner l'arrondi à 10^{-3} et un encadrement d'amplitude 10^{-5} de $\sqrt{19}$.

Avec la calculatrice, $\sqrt{19} \approx 4,358\,898\,944$.

L'arrondi à 10^{-3} près de $\sqrt{19}$ est $4,359$.
Un encadrement d'amplitude 10^{-5} est $4,358\,89 < \sqrt{19} < 4,358\,90$.

Exercice 16 (2 points)

On ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de $\dfrac{2}{3}$ et l'on double le résultat. Quel est ce nombre ?

Soit x ce nombre.

$\dfrac{2+x}{3+x} = 2 \times \dfrac{2}{3}$, soit $\dfrac{2+x}{3+x} = \dfrac{4}{3}$.

Par produit en croix, $3(2+x) = 4(3+x)$, soit $6 + 3x = 12 + 4x$, et $x = -6$.

Vérification : $\dfrac{2-6}{3-6} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3} = 2 \times \dfrac{2}{3}$.

Le nombre cherché est -6.

Exercice 17 (3 points)

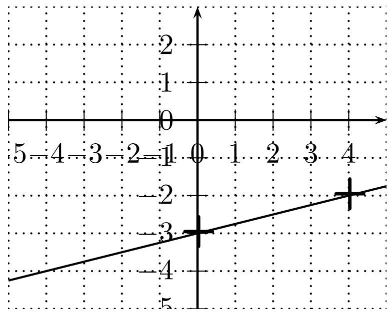
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x - 3$.

1. Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
   $f(-1) = \dfrac{1}{4} \times (-1) - 3 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{12}{4} = -\dfrac{13}{4}$.
   $f(2) = \dfrac{1}{4} \times 2 - 3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

2. Déterminer l'antécédent de 0 par f.
   $f(x) = 0$ ssi $\dfrac{1}{4}x - 3 = 0$ ssi $\dfrac{1}{4}x = 3$, soit $x = 3 \times 4 = 12$.
   L'antécédent de 0 par f est 12.

3. Tracer la représentation graphique de f. Justifier.
   Comme f est une fonction affine, la représentation graphique est une droite, il suffit donc de déterminer deux points.

x	0	4
$f(x)$	-3	-2



4. Existe-t-il un nombre qui soit égal à son image par f ? Justifier.
   $f(x) = x$ ssi $\dfrac{1}{4}x - 3 = x$ ssi $\dfrac{3}{4}x = -3$ ssi $x = 3 \times \dfrac{4}{3}$ ssi $x = 4$.
   Un seul nombre est égal à son image par f, c'est 4.

5. Soit g la fonction affine dont la droite représentative passe par les points $A(-3;1)$ et $B(-10;4)$.
   (a) Déterminer l'expression de $g(x)$. Il existe des réels a et b tels que $g(x) = ax + b$.
   $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{-10+3} = -\dfrac{3}{7}$.
   Donc $g(x) = -\dfrac{3}{7}x + b$.
   Comme $A(-3;1) \in \mathscr{C}_g$, on a $g(-3) = 1$, soit $-\dfrac{3}{7} \times (-3) + b = 1$, et $b = 1 - \dfrac{9}{7} = -\dfrac{2}{7}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{2}{7}$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   $\dfrac{1}{4}x - 3 = -\dfrac{3}{7}x - \dfrac{2}{7}$ ssi $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{7}x = 3 - \dfrac{2}{7}$ ssi $\dfrac{7+12}{28}x = \dfrac{21-2}{7}$ ssi $\dfrac{19}{28}x = \dfrac{19}{7}$ ssi $x = \dfrac{19}{7} \times \dfrac{28}{19} = \dfrac{19 \times 4 \times 7}{7 \times 19} = 4$.
   La solution est 4.