Chapitre 3 : Angles orientés. Trigonométrie

I Angles orientés de vecteurs

Dans tout ce chapitre, on considère des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, de sorte que l'angle de vecteurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ soit bien défini.

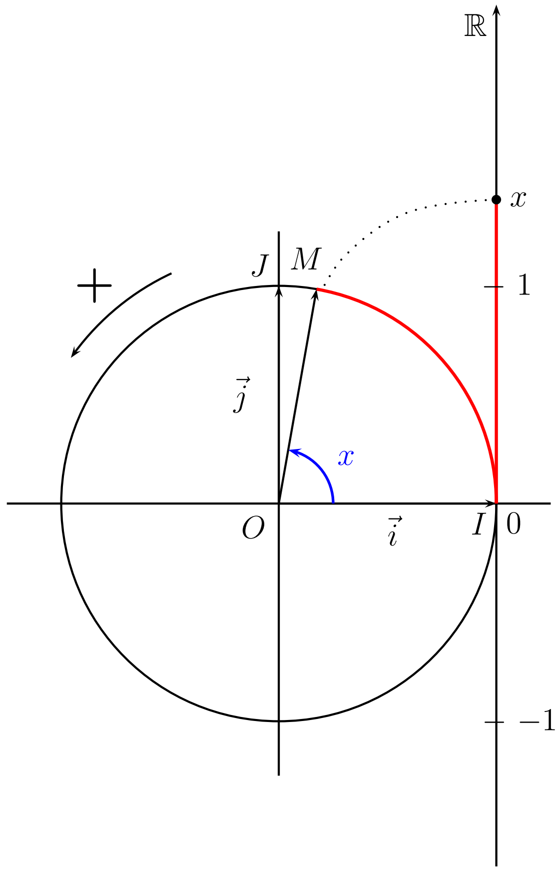
I.1 Rappels sur le cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$.
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, pour lequel on a choisi pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On enroule l'axe gradué des nombres réels sur le cercle en plaçant l'origine des réels en I.
Alors, à tout nombre réel x correspond un unique point M sur le cercle.
On dit que M est l'image de x sur le cercle, ou que x est une abscisse curviligne de M.

x est une mesure en radian de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

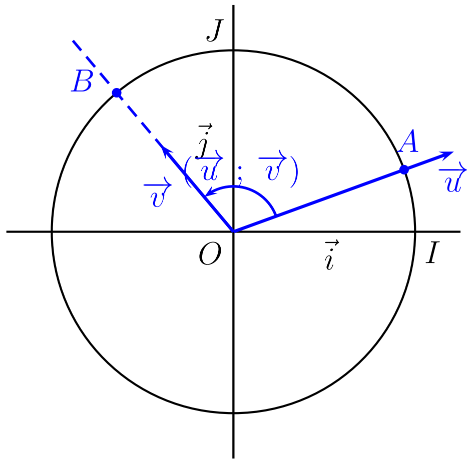
Intérêt de mesurer les angles en radians :
Lorsque $x \in [0; 2\pi[$, la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{OM}$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ (en radians).



Remarque
Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, son périmètre est donc ...
Deux nombres réels ont la même image sur le cercle trigonométrique ssi ...
....
Les réels x et x' ont la même image ssi il existe ...
Notation et vocabulaire :
On dit alors que x est congru à x' modulo 2π et on note $x = x' \quad [2\pi]$.

I.2 Mesures des angles orientés

Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Notons A et B les points d'intersection du cercle trigonométrique avec les demi-droites $[O;\overrightarrow{u})$ et $[O;\overrightarrow{v})$.
On appelle mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ les nombres réels $b-a$ où :
a est une abscisse curviligne de A,
b est une abscisse curviligne de B.



Remarque (Cas particuliers)
- Angle nul : $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u}) = 0\ [2\pi]$.
- Angle plat : $(-\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{u}) = \pi\ [2\pi]$.
- Angle droit : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Propriété
Si x est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$, alors toutes les mesures de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ sont de la forme $x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
On écrit $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = x\ [2\pi]$.

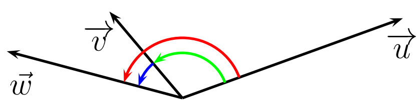
Démonstration
On reprend les notations de la définition. Considérons deux mesures $b-a$ et $b'-a'$ de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$. Comme a et a' sont deux abscisses curvilignes du point A, il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $a'=a+2n\pi$.
De même, il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $b'=b+2m\pi$.
Alors, $b'-a' = b+2m\pi-(a+2n\pi) = b-a+2(m-n)\pi$. $k=m-n\in\mathbb{Z}$.
Deux mesures de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$ diffèrent d'un multiple de 2π. □

Définition (Mesure principale)
Parmi toutes les mesures de l'angle $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$, une seule appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est la mesure principale de $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.

I.3 Propriétés des angles orientés

Théorème (Relation de Chasles)
Quels que soient les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

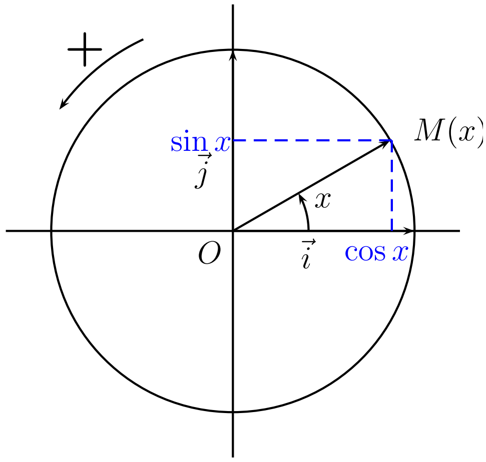
$$(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w})\ [2\pi]$$



II Trigonométrie

II.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M(x)$ l'image de x sur le cercle trigonométrique.
Le cosinus de x est l'abscisse de M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\cos x$.
Le sinus de x est l'ordonnée de M dans $\left(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\right)$. On le note $\sin x$.

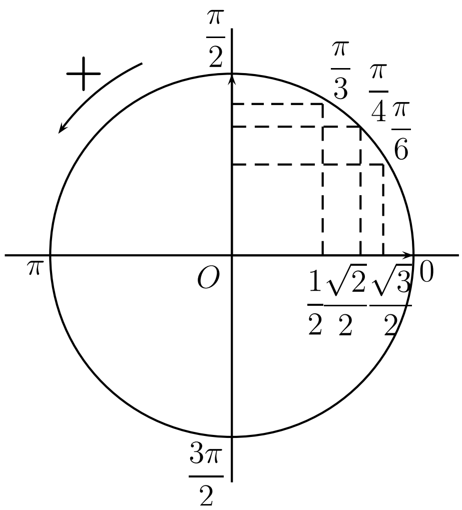


Propriété (Conséquences immédiates)
Pour tout x réel, on a :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété (valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

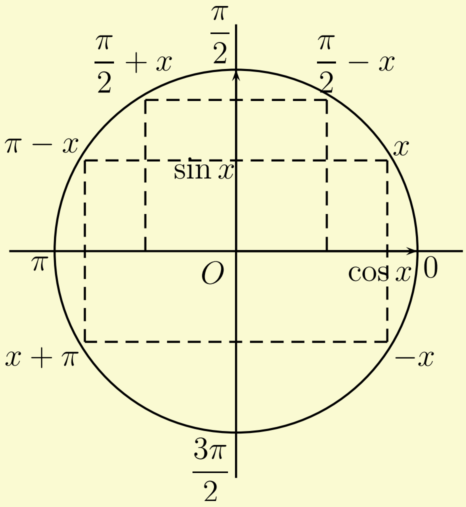


II.2 Angles associés

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}
\cos(-x) & = & \cos(x) \\
\sin(-x) & = & -\sin(x) \\
\cos(x+\pi) & = & -\cos(x) \\
\sin(x+\pi) & = & -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) & = & -\cos(x) \\
\sin(\pi - x) & = & \sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & = & \sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & = & \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & = & -\sin(x) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & = & \cos(x)
\end{array}$$



Exercice 1

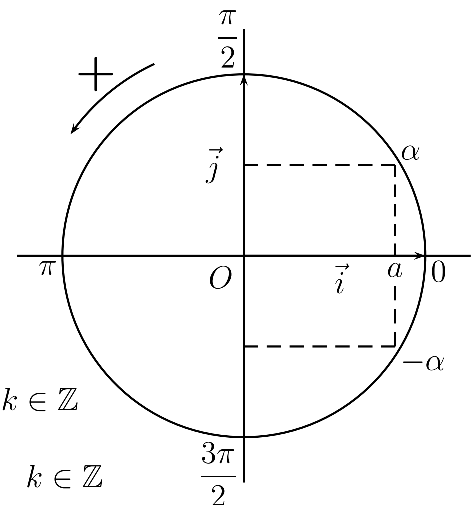
1. cos et sin, angles associés
   ressource 35
   ressource 19
   ressource 1126
2. mesure principale :
   ressource 251
   ressource 568
   ressource 567

II.3 Équations $\cos(x) = a$, $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

II.3.a Équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— Si $a < -1$ ou si $a > 1$, on remarque que l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

— Sinon, $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = a$.
$\cos(x) = a \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :

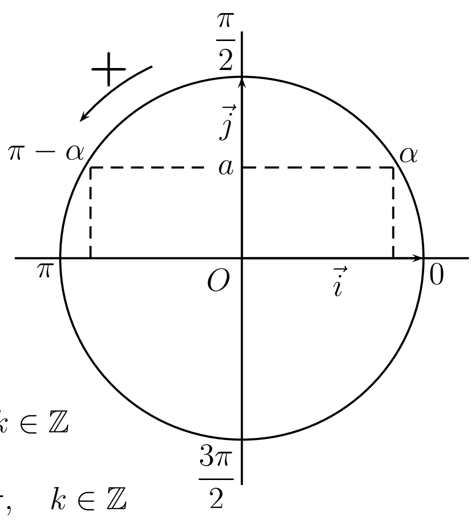


$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x & = & \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ & ou & & \\ x & = & -\alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

II.3.b Équation $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

— De même que précédemment, si $a < -1$ ou si $a > 1$ l'équation n'a pas de solution. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

— Sinon, ($-1 \leqslant a \leqslant 1$), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\alpha) = a$.
$\sin(x) = a \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\alpha)$.
En étudiant le cercle trigonométrique, on obtient alors :



$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ & ou & \\ x & = & \pi - \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$